C8 : Analyse des performances des systèmes asservis
C8-2 : Précision et rapidité des systèmes asservis

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon

Classe de MPSI

20 Mai 2025

Plan

1. Quantification de la précision
    - Définition de la précision
    - Erreur indicielle
    - Erreur de trainage
    - Erreur d'accélération
    - Récapitulatif
    - Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
    - Cas d'une perturbation
2. Rapidité des SLCI
    - Définition
    - Influence de l'ordre
        - Système du premier ordre
        - Système du deuxième ordre
    - Influence du bouclage
        - Système du premier ordre
        - Système du deuxième ordre
    - Influence de la bande passante

Plan

1. Quantification de la précision
   - Définition de la précision
   - Erreur indicielle
   - Erreur de trainage
   - Erreur d'accélération
   - Récapitulatif
   - Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
   - Cas d'une perturbation
2. Rapidité des SLCI
   - Définition
   - Influence de l'ordre
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence du bouclage
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence de la bande passante

Précision : définition

Erreur ou écart

- En régime permanent, on appelle l'erreur ou l'écart, la différence entre la sortie théorique (s_{th}) souhaitée et celle obtenue ($s(t)$) lorsque t tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \to +\infty} (s(t) - s_{th}) = s_\infty - s_{th}} \quad (1)$$

- En pratique

$$\varepsilon(p) = \mathcal{L}(\varepsilon(t)) = E(p) - G(p)\, S(p) = E(p) - G(p)\, H(p)\, \varepsilon(p).$$

-

$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)\, H(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}.} \quad (2)$$

Précision : définition

Erreur ou écart

- En régime permanent, on appelle l'erreur ou l'écart, la différence entre la sortie théorique (s_{th}) souhaitée et celle obtenue ($s(t)$) lorsque t tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to+\infty} (s(t) - s_{th}) = s_\infty - s_{th}} \quad (1)$$

- En pratique

$$\varepsilon(p) = \mathcal{L}(\varepsilon(t)) = E(p) - G(p)\ S(p) = E(p) - G(p)\ H(p)\ \varepsilon(p).$$

-

$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)\ H(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}.} \quad (2)$$

Précision : définition

Erreur ou écart

- En régime permanent, on appelle l'erreur ou l'écart, la différence entre la sortie théorique (s_{th}) souhaitée et celle obtenue ($s(t)$) lorsque t tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to+\infty} (s(t) - s_{th}) = s_\infty - s_{th}} \quad (1)$$

- En pratique

$$\varepsilon(p) = \mathcal{L}(\varepsilon(t)) = E(p) - G(p)\ S(p) = E(p) - G(p)\ H(p)\ \varepsilon(p).$$

-

$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)\ H(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}.} \quad (2)$$

Précision : définition

Erreur ou écart

- **l'erreur statique** ε_S (ou de position) se mesure sur la réponse à un échelon.

$$e(t) = Au(t).$$

- **l'erreur de traînage** (ou de vitesse) ε_V se mesure sur la réponse à une rampe.

$$e(t) = A\ t\ u(t).$$

Précision : définition

Erreur ou écart

- **l'erreur statique** ε_S (ou de position) se mesure sur la réponse à un échelon.

$$e(t) = Au(t).$$

- **l'erreur de traînage** (ou de vitesse) ε_V se mesure sur la réponse à une rampe.

$$e(t) = A\ t\ u(t).$$

Précision : définition

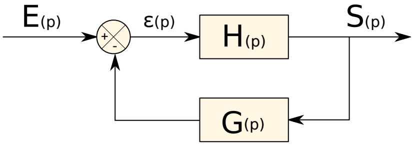
Remarque

- Avec le théorème de la valeur finale

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p).} \quad (3)$$

- Dans le cas d'un retour unitaire :

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \to 0} p\,(E(p) - S(p))} \quad (4)$$



Précision : définition

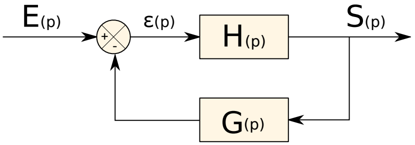
Remarque

- Avec le théorème de la valeur finale

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p).} \tag{3}$$

- Dans le cas d'un retour unitaire :

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \to 0} p\,(E(p) - S(p))} \tag{4}$$



Plan

1. Quantification de la précision
   - Définition de la précision
   - Erreur indicielle
   - Erreur de trainage
   - Erreur d'accélération
   - Récapitulatif
   - Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
   - Cas d'une perturbation
2. Rapidité des SLCI
   - Définition
   - Influence de l'ordre
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence du bouclage
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence de la bande passante

Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée $e(t)$est un échelon d'amplitude E_0, donc sa transformée de Laplace est $E(p) = \frac{E_0}{p}$.
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + ... + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + ... + d_n\ p^n}.$$

- On peut alors calculer ε_S :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\ \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{p\ E_0}{p\left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+...+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+...+d_n\ p^n}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+...+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+...+d_n\ p^n}}$$

- Deux cas se présentent alors :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 1$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée $e(t)$est un échelon d'amplitude E_0, donc sa transformée de Laplace est $E(p) = \frac{E_0}{p}$.
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + ... + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + ... + d_n\ p^n}.$$

- On peut alors calculer ε_S :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\ \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{p\ E_0}{p\left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+...+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+...+d_n\ p^n}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+...+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+...+d_n\ p^n}}$$

- Deux cas se présentent alors :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 1$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée $e(t)$est un échelon d'amplitude E_0, donc sa transformée de Laplace est $E(p) = \frac{E_0}{p}$.
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + \ldots + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + \ldots + d_n\ p^n}.$$

- On peut alors calculer ε_S :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\ \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{p\ E_0}{p\left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}}$$

- Deux cas se présentent alors :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 1$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée $e(t)$est un échelon d'amplitude E_0, donc sa transformée de Laplace est $E(p) = \frac{E_0}{p}$.
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + ... + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + ... + d_n\ p^n}.$$

- On peut alors calculer ε_S :

$$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p\to 0} \frac{p\,E_0}{p\left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}\right)} = \lim_{p\to 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}}$$

- Deux cas se présentent alors :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \frac{E_0}{1+K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 1$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée $e(t)$est un échelon d'amplitude E_0, donc sa transformée de Laplace est $E(p) = \frac{E_0}{p}$.
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + ... + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + ... + d_n\ p^n}.$$

- On peut alors calculer ε_S :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\ \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{p\ E_0}{p \left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}}$$

- Deux cas se présentent alors :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 1$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée $e(t)$est un échelon d'amplitude E_0, donc sa transformée de Laplace est $E(p) = \frac{E_0}{p}$.
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + ... + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + ... + d_n\ p^n}.$$

- On peut alors calculer ε_S :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{p\ E_0}{p\left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}}$$

- Deux cas se présentent alors :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 1$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p) = 0.$$

Plan

1. Quantification de la précision
   - Définition de la précision
   - Erreur indicielle
   - Erreur de trainage
   - Erreur d'accélération
   - Récapitulatif
   - Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
   - Cas d'une perturbation
2. Rapidité des SLCI
   - Définition
   - Influence de l'ordre
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence du bouclage
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence de la bande passante

Précision : erreur de trainage

- Ici $E(p) = \frac{a}{p^2}$.
- On peut alors calculer ε_V :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\,\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{p\,a}{p^2 \left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1 + c_1\,p + \ldots + c_m\,p^m}{1 + d_1\,p + \ldots + d_n\,p^n}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{p\,\left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1 + c_1\,p + \ldots + c_m\,p^m}{1 + d_1\,p + \ldots + d_n\,p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 1$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 2$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur de trainage

- Ici $E(p) = \frac{a}{p^2}$.
- On peut alors calculer ε_V :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\,\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$
$$\lim_{p \to 0} \frac{p\ a}{p^2\left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{p\ \left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\ p+\ldots+c_m\ p^m}{1+d_1\ p+\ldots+d_n\ p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha = 0$:
  $$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \infty.$$
  - Cas où $\alpha = 1$:
  $$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$
  - Cas où $\alpha \geq 2$:
  $$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur de trainage

- Ici $E(p) = \frac{a}{p^2}$.
- On peut alors calculer ε_V :

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{E(p)}{1+FTBO(p)} = \lim_{p\to 0} \frac{p\,a}{p^2\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)} = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p\,\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 1$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 2$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur de trainage

- Ici $E(p) = \frac{a}{p^2}$.
- On peut alors calculer ε_V :

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{E(p)}{1+FTBO(p)} = \lim_{p\to 0} \frac{p\,a}{p^2\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)} = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p\,\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 1$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 2$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur de trainage

- Ici $E(p) = \frac{a}{p^2}$.
- On peut alors calculer ε_V :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{p\ a}{p^2 \left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + \ldots + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + \ldots + d_n\ p^n}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{p\ \left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + \ldots + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + \ldots + d_n\ p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 1$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 2$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur de trainage

- Ici $E(p) = \frac{a}{p^2}$.
- On peut alors calculer ε_V :

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{E(p)}{1+FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p\to 0} \frac{p\,a}{p^2\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)} = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p\,\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 1$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 2$:

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = 0.$$

Plan

1 Quantification de la précision
- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

2 Rapidité des SLCI
- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

Précision : erreur d'accélération

- Ici, $E(p) = \frac{b}{p^3}$.
- On peut alors calculer ε_a (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{E(p)}{1+FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p\to 0} \frac{b\,p}{p^3\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)} = \lim_{\to 0} \frac{b}{p^2\,\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha \leq 1$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 2$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 3$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur d'accélération

- Ici, $E(p) = \frac{b}{p^3}$.
- On peut alors calculer ε_a (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\, \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{b\ p}{p^3 \left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + \ldots + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + \ldots + d_n\ p^n}\right)} = \lim_{\to 0} \frac{b}{p^2\ \left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\ p + \ldots + c_m\ p^m}{1 + d_1\ p + \ldots + d_n\ p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha \leq 1$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 2$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \frac{b}{K}$$

  - Cas où $\alpha \geq 3$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur d'accélération

- Ici, $E(p) = \frac{b}{p^3}$.
- On peut alors calculer ε_a (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p \, \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{b\, p}{p^3 \left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\, p + \ldots + c_m\, p^m}{1 + d_1\, p + \ldots + d_n\, p^n}\right)} = \lim_{\to 0} \frac{b}{p^2 \left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\, p + \ldots + c_m\, p^m}{1 + d_1\, p + \ldots + d_n\, p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha \leq 1$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 2$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 3$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur d'accélération

- Ici, $E(p) = \frac{b}{p^3}$.
- On peut alors calculer ε_a (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{E(p)}{1+FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p\to 0} \frac{b\,p}{p^3\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)} = \lim_{\to 0} \frac{b}{p^2\,\left(1+\frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha \leq 1$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 2$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 3$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur d'accélération

- Ici, $E(p) = \frac{b}{p^3}$.
- On peut alors calculer ε_a (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\, \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{b\, p}{p^3 \left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\, p + \ldots + c_m\, p^m}{1 + d_1\, p + \ldots + d_n\, p^n}\right)} = \lim_{\to 0} \frac{b}{p^2 \left(1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\, p + \ldots + c_m\, p^m}{1 + d_1\, p + \ldots + d_n\, p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha \leq 1$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 2$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 3$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = 0.$$

Précision : erreur d'accélération

- Ici, $E(p) = \frac{b}{p^3}$.
- On peut alors calculer ε_a (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\,\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{b\,p}{p^3\left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)} = \lim_{\to 0} \frac{b}{p^2\,\left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1+c_1\,p+\ldots+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+\ldots+d_n\,p^n}\right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où $\alpha \leq 1$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \infty.$$

  - Cas où $\alpha = 2$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

  - Cas où $\alpha \geq 3$:

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = 0.$$

Plan

1 Quantification de la précision
- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

2 Rapidité des SLCI
- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	∞	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	∞	∞	$\frac{b}{K}$	0

Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de trainage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe ou le gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	∞	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	∞	∞	$\frac{b}{K}$	0

Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de trainage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe ou le gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	∞	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	∞	∞	$\frac{b}{K}$	0

Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de trainage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe ou le gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	∞	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	∞	∞	$\frac{b}{K}$	0

Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de trainage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe ou le gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	∞	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	∞	∞	$\frac{b}{K}$	0

Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de trainage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe ou le gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

Plan

1 Quantification de la précision
- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

2 Rapidité des SLCI
- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

Précision : systèmes du premier et du deuxième ordre

Considérons un système avec un retour unitaire dont la $FTBO(p)$ est du premier ou du deuxième ordre :

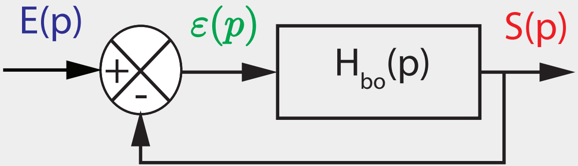
$$\begin{cases} H_{BO1}(p) = \frac{K}{1+\tau\ p}. \\ H_{BO2}(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}\cdot p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}. \end{cases}$$

Précision : systèmes du premier et du deuxième ordre

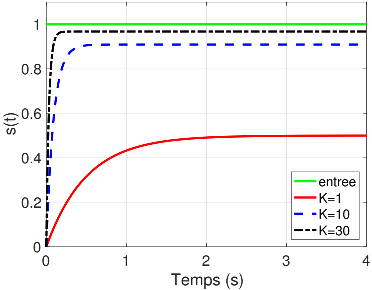
Propriété : Précision d'un premier ordre et du second ordre

La FTBO pour les systèmes des premier et deuxième ordre est de classe 0. On en déduit que :

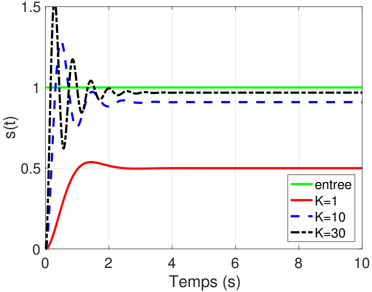
- l'erreur indicielle vaut $\frac{E_0}{1+K}$;
- l'erreur de trainage vaut ∞.
- ici l'ordre de la fonction de transfert n'a pas d'influence sur la précision.



Précision : systèmes du premier et du deuxième ordre

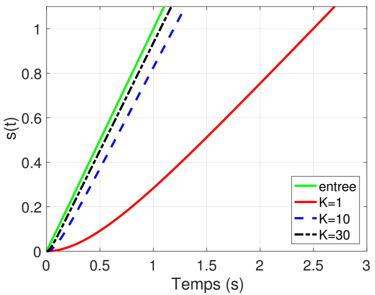


Réponse indicielle 1er ordre

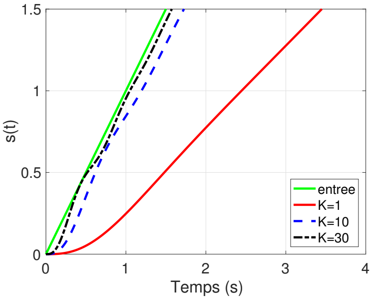


Réponse indicielle 2ème ordre

Précision : systèmes du premier et du deuxième ordre



Réponse à une rampe 1er ordre



Réponse à une rampe 2ème ordre

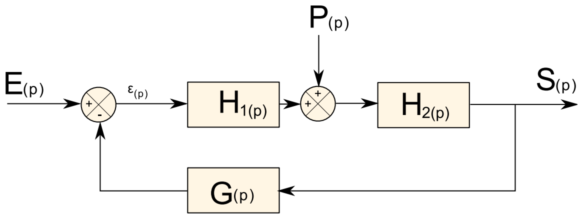
Plan

1. Quantification de la précision
   - Définition de la précision
   - Erreur indicielle
   - Erreur de trainage
   - Erreur d'accélération
   - Récapitulatif
   - Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
   - Cas d'une perturbation
2. Rapidité des SLCI
   - Définition
   - Influence de l'ordre
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence du bouclage
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence de la bande passante

Précision : cas d'une perturbation

- On considère désormais un système avec une consigne (entrée maitrisée) $E(p)$, une entrée non-maitrisée due à une perturbation ($P(p)$) et une réponse ou sortie ($S(p)$).
- Par le théorème de superposition (car système linéaire), on peut donner une relation entre $S(p)$, $E(p)$ et $P(p)$ en introduisant les deux fonctions de transfert $H_E(p)$ et $H_P(p)$:

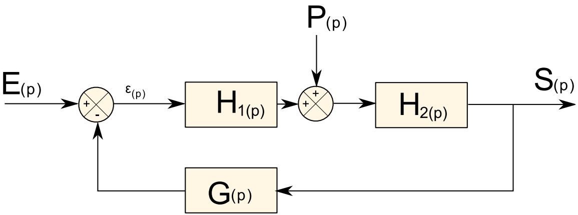
$$S(p) = H_E(p) \cdot E(p) + H_P(p) \cdot P(p).$$



Précision : cas d'une perturbation

- On considère désormais un système avec une consigne (entrée maitrisée) $E(p)$, une entrée non-maitrisée due à une perturbation ($P(p)$) et une réponse ou sortie ($S(p)$).
- Par le théorème de superposition (car système linéaire), on peut donner une relation entre $S(p)$, $E(p)$ et $P(p)$ en introduisant les deux fonctions de transfert $H_E(p)$ et $H_P(p)$:

$$S(p) = H_E(p) \cdot E(p) + H_P(p) \cdot P(p).$$



Précision : cas d'une perturbation

- **Calcul de $H_E(p)$et $H_P(p)$:**
  - Pour calculer $H_P(p)$, on prend $E(p) = 0$:

$$H_P(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}$$

  - Pour calculer $H_E(p)$, on prend $P(p) = 0$:

$$H_E(p) = \frac{H_1\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}$$

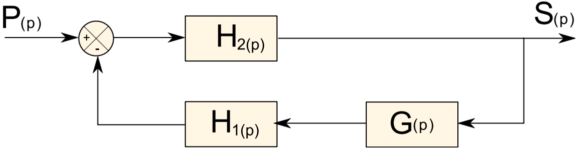
Précision : cas d'une perturbation

- **Calcul de $H_E(p)$et $H_P(p)$:**
  - Pour calculer $H_P(p)$, on prend $E(p) = 0$:

$$H_P(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}$$

  - Pour calculer $H_E(p)$, on prend $P(p) = 0$:

$$H_E(p) = \frac{H_1\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}$$



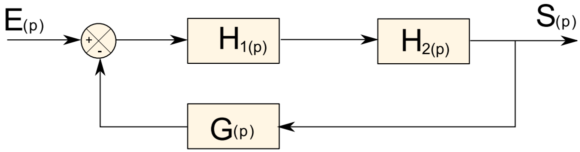
Précision : cas d'une perturbation

- **Calcul de $H_E(p)$et $H_P(p)$:**
  - Pour calculer $H_P(p)$, on prend $E(p) = 0$:

$$H_P(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}$$

  - Pour calculer $H_E(p)$, on prend $P(p) = 0$:

$$H_E(p) = \frac{H_1\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}$$



Précision : cas d'une perturbation

- **Calculons** $\varepsilon(p) = E(p) - G(p)\ S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p)\ H_1(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p)$$

-

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec $\varepsilon_E(p)$ l'écart du à l'entrée et $\varepsilon_P(p)$ l'écart du à la perturbation.
  - Avec $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p).$$

  - Avec $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

Précision : cas d'une perturbation

- **Calculons** $\varepsilon(p) = E(p) - G(p)\ S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p)\ H_1(p)\ H_2(p)}{1+FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1+H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p)$$

- $$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1+FTBO(p)}\ P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec $\varepsilon_E(p)$ l'écart du à l'entrée et $\varepsilon_P(p)$ l'écart du à la perturbation.
  - Avec $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1+H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ E(p) = \frac{1}{1+FTBO(p)}\ E(p).$$

  - Avec $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1+H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1+FTBO(p)}\ P(p).$$

Précision : cas d'une perturbation

- **Calculons** $\varepsilon(p) = E(p) - G(p)\ S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p)\ H_1(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p)$$

-

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec $\varepsilon_E(p)$ l'écart du à l'entrée et $\varepsilon_P(p)$ l'écart du à la perturbation.
  - Avec $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p)$$

  - Avec $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

Précision : cas d'une perturbation

- **Calculons** $\varepsilon(p) = E(p) - G(p)\ S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p)\ H_1(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p)$$

-

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec $\varepsilon_E(p)$ l'écart du à l'entrée et $\varepsilon_P(p)$ l'écart du à la perturbation.
  - Avec $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p).$$

  - Avec $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

Précision : cas d'une perturbation

- **Calculons** $\varepsilon(p) = E(p) - G(p)\ S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p)\ H_1(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p)$$

- $$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec $\varepsilon_E(p)$ l'écart du à l'entrée et $\varepsilon_P(p)$ l'écart du à la perturbation.
  - Avec $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p).$$

  - Avec $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

Précision : cas d'une perturbation

- **Calculons** $\varepsilon(p) = E(p) - G(p)\ S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p)\ H_1(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p)$$

- $$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p) - \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec $\varepsilon_E(p)$ l'écart du à l'entrée et $\varepsilon_P(p)$ l'écart du à la perturbation.
  - Avec $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\ E(p).$$

  - Avec $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)}\ P(p) = \frac{G(p)\ H_2(p)}{1 + FTBO(p)}\ P(p).$$

Précision : cas d'une perturbation

- On pose également :
  - $$H_1(p) = \frac{K_1 \; N_1(p)}{p^{\alpha_1} \; D_1(p)};$$
  - $$G(p) \; H_2(p) = \frac{K_2 \; N_2(p)}{p^{\alpha_2} \; D_2(p)};$$
  - avec $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$ car les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $G(p) \; H_2(p)$ sont exprimées sous formes canoniques.

Précision : cas d'une perturbation

- On pose également :
  - $$H_1(p) = \frac{K_1 \ N_1(p)}{p^{\alpha_1} \ D_1(p)};$$
  - $$G(p) \ H_2(p) = \frac{K_2 \ N_2(p)}{p^{\alpha_2} \ D_2(p)};$$
  - avec $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$ car les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $G(p) \ H_2(p)$ sont exprimées sous formes canoniques.

Précision : cas d'une perturbation

- On pose également :
  - $$H_1(p) = \frac{K_1\ N_1(p)}{p^{\alpha_1}\ D_1(p)};$$
  - $$G(p)\ H_2(p) = \frac{K_2\ N_2(p)}{p^{\alpha_2}\ D_2(p)};$$
  - avec $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$ car les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $G(p)\ H_2(p)$ sont exprimées sous formes canoniques.

Précision : cas d'une perturbation

- On pose également :
  - $$H_1(p) = \frac{K_1 \; N_1(p)}{p^{\alpha_1} \; D_1(p)};$$
  - $$G(p) \; H_2(p) = \frac{K_2 \; N_2(p)}{p^{\alpha_2} \; D_2(p)};$$
  - avec $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$ car les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $G(p) \; H_2(p)$ sont exprimées sous formes canoniques.

Précision : cas d'une perturbation de type indicielle

- On calcule $\lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon_P(t) = \lim\limits_{p \to 0} p\, \varepsilon_P(p)$ avec $P(p) = \frac{P_0}{p}$.
-

$$\lim_{p \to 0} p\, \varepsilon_P(p) = \lim_{p \to 0} \left(\frac{P_0\ K_2\ N_2(p)\ p^{\alpha_1}\ D_1(p)}{p^{\alpha_1}\ D_1(p)\ p^{\alpha_2}\ D_2(p) + K_1\ N_1(p)\ K_2\ N_2(p)} \right)$$
$$= \lim_{p \to 0} \left(\frac{P_0\ K_2\ p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1\ K_2} \right)$$

Précision : cas d'une perturbation de type indicielle

- On calcule $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_P(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\, \varepsilon_P(p)$ avec $P(p) = \frac{P_0}{p}$.
-

$$\lim_{p\to 0} p\, \varepsilon_P(p) = \lim_{p\to 0} \left(\frac{P_0\ K_2\ N_2(p)\ p^{\alpha_1}\ D_1(p)}{p^{\alpha_1}\ D_1(p)\ p^{\alpha_2}\ D_2(p) + K_1\ N_1(p)\ K_2\ N_2(p)} \right)$$
$$= \lim_{p\to 0} \left(\frac{P_0\ K_2\ p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1\ K_2} \right)$$

Précision : cas d'une perturbation de type rampe

- On calcule $\lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon_P(t) = \lim\limits_{p \to 0} p\, \varepsilon_P(p)$ avec $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$.
-

$$\lim_{p \to 0} p\, \varepsilon_P(p) = \lim_{p \to 0} \left(\frac{P_0\ K_2\ N_2(p)\ p^{\alpha_1 - 1}\ D_1(p)}{p^{\alpha_1}\ D_1(p)\ p^{\alpha_2}\ D_2(p) + K_1\ N_1(p)\ K_2\ N_2(p)} \right)$$

$$= \lim_{p \to 0} \left(\frac{P_0\ K_2\ p^{\alpha_1 - 1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1\ K_2} \right)$$

Précision : cas d'une perturbation de type rampe

- On calcule $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_P(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\, \varepsilon_P(p)$ avec $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$.
-

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0} p\, \varepsilon_P(p) &= \lim_{p\to 0}\left(\frac{P_0\ K_2\ N_2(p)\ p^{\alpha_1 - 1}\ D_1(p)}{p^{\alpha_1}\ D_1(p)\ p^{\alpha_2}\ D_2(p) + K_1\ N_1(p)\ K_2\ N_2(p)}\right)\\ &= \lim_{p\to 0}\left(\frac{P_0\ K_2\ p^{\alpha_1 - 1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1\ K_2}\right)\end{aligned}$$

Précision : cas d'une perturbation

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \geq 1$	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0\ K_2}{1+K_1\ K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$			
Rampe : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	$+\infty$		$\frac{P_0}{K_1}$	0

Conclusion : précision en fonction de la perturbation

- En réponse à une perturbation de type échelon, un système comportant au moins une intégration en amont du point d'entrée de la perturbation présentera une erreur nulle.
- En réponse à une perturbation de type rampe, un système comportant au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de la perturbation présentera une erreur nulle.
- Ainsi pour rendre un système plus précis, on cherchera à augmenter le gain statique de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en augmenter le nombre d'intégrateurs purs.

Précision : cas d'une perturbation

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \geq 1$	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0\ K_2}{1+K_1\ K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$			
Rampe : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	$+\infty$		$\frac{P_0}{K_1}$	0

Conclusion : précision en fonction de la perturbation

- En réponse à une **perturbation de type échelon**, un système comportant **au moins une intégration en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- En réponse à une **perturbation de type rampe**, un système comportant **au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- Ainsi pour rendre un système **plus précis**, on cherchera à **augmenter le gain statique** de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en **augmenter le nombre d'intégrateurs purs**

Précision : cas d'une perturbation

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \geq 1$	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0\ K_2}{1+K_1\ K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$			
Rampe : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	$+\infty$		$\frac{P_0}{K_1}$	0

Conclusion : précision en fonction de la perturbation

- En réponse à une **perturbation de type échelon**, un système comportant **au moins une intégration en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- En réponse à une **perturbation de type rampe**, un système comportant **au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- Ainsi pour rendre un système **plus précis**, on cherchera à **augmenter le gain statique** de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en **augmenter le nombre d'intégrateurs purs**.

Précision : cas d'une perturbation

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \geq 1$	$\alpha_2 \in [0;+\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0\ K_2}{1+K_1\ K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0;+\infty]$			
Rampe : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	$+\infty$		$\frac{P_0}{K_1}$	0

Conclusion : précision en fonction de la perturbation

- En réponse à une **perturbation de type échelon**, un système comportant **au moins une intégration en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- En réponse à une **perturbation de type rampe**, un système comportant **au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- Ainsi pour rendre un système **plus précis**, on cherchera à **augmenter le gain statique** de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en **augmenter le nombre d'intégrateurs purs**.

Plan

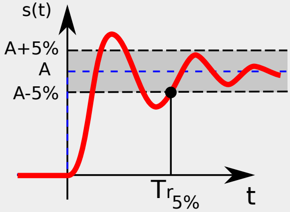
1 Quantification de la précision
- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

2 Rapidité des SLCI
- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

Rapidité des SLCI

Rapidité des SLCI

- On peut définir la **rapidité** d'un système comme la durée qu'il faut pour un système à se stabiliser lorsqu'il est soumis à une variation brusque de la grandeur d'entrée (échelon par exemple).
- On peut la définir à partir du temps de réponse à *n*% (généralement 5%).
- Cela nécessite que le système soit **stable**.



Plan

1. Quantification de la précision
   - Définition de la précision
   - Erreur indicielle
   - Erreur de trainage
   - Erreur d'accélération
   - Récapitulatif
   - Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
   - Cas d'une perturbation
2. Rapidité des SLCI
   - Définition
   - Influence de l'ordre
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence du bouclage
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence de la bande passante

Rapidité des SLCI

Rapidité des systèmes du premier ordre

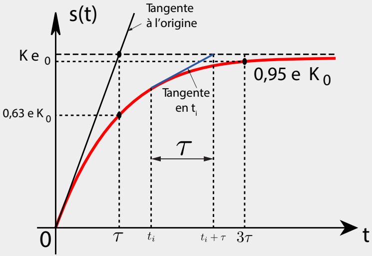
Pour un système du **premier ordre** de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

soumis à un échelon le temps de réponse à 5% ($t_{r5\%}$) est donné par :

$$\boxed{t_{r5\%} = 3 \cdot \tau} \qquad (5)$$

Plus la constante de temps est petite plus le système est rapide.



Rapidité des SLCI

Rapidité des systèmes du deuxième ordre

Pour un système du **deuxième ordre** de fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

soumis à un échelon, le temps de réponse à 5% est donné selon des valeurs de ξ et dépend de ω_0.

On peut retenir :

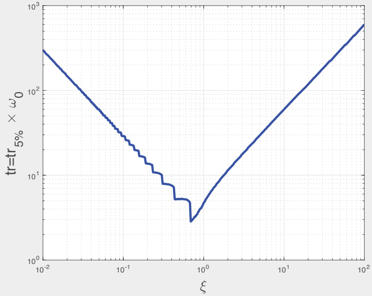
- $\xi = 0,7$ (Optimum de rapidité) :

$$t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_0}$$

;

- $\xi = 1$ (Optimum de rapidité) :

$$t_{r5\%} = \frac{5}{\omega_0}$$



Pour le reste, on peut utiliser l'abaque ci-contre.

Pour un même coefficient d'amortissement ξ, plus ω_0 augmente et plus le temps de réponse à 5% diminue et donc le système sera plus rapide.

Plan

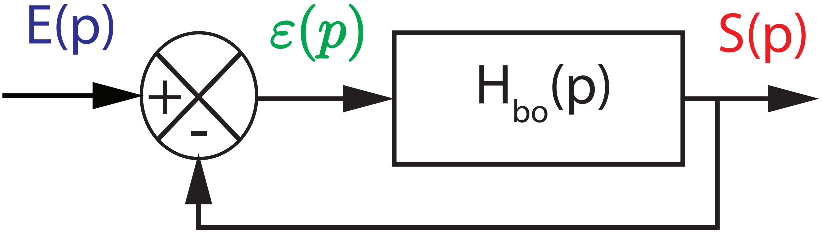
1 Quantification de la précision
- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

2 Rapidité des SLCI
- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

Rapidité des SLCI

Si considère un système en boucle ouverte que l'on souhaite boucler (on prendra ici un retour unitaire).

$$\boxed{H_{BF} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}} \tag{6}$$



Rapidité des SLCI

Système bouclé du 1er ordre

Dans le cas d'une FTBO du 1er ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On peut alors calculer $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+\tau_{BF} \cdot p}$:

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 1er ordre

Dans le cas d'une FTBO du 1er ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On peut alors calculer $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+\tau_{BF} \cdot p}$:

$$H_{BF}(p) = \frac{\frac{K}{1+\tau \cdot p}}{1 + \frac{K}{1+\tau \cdot p}} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{\tau}{1+K} \cdot p}$$

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 1^{er} ordre

- K_{BF} :
- τ_{BF} :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 1^{er} ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1^{er} ordre ;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 1er ordre

- K_{BF} :
- τ_{BF} :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 1er ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1er ordre ;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 1er ordre

- K_{BF} :

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K}$$

- τ_{BF} :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 1er ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1er ordre ;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 1^{er} ordre

- K_{BF} :

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K}$$

- τ_{BF} :

$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+K}$$

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 1^{er} ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1^{er} ordre ;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 2ème ordre

Dans le cas d'une FTBO du 2ème ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On peut alors calculer $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+\frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{0BF^2}}}$:

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 2$^{\text{ème}}$ ordre

Dans le cas d'une FTBO du 2$^{\text{ème}}$ ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On peut alors calculer $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+\frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{0BF^2}}}$:

$$H_{BF}(p) = \frac{\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}\cdot p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}\cdot p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{K + 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$= \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{2\xi}{(1+K)\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{(1+K)\cdot\omega_0^2}}$$

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 2ème ordre

- K_{BF} :

- ω_{0BF} :

- ξ_{BF} :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2ème ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2ème ordre ;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement ξ_{BF} lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO. Par conséquent si ξ_{BF} diminue et :
  - si ξ_{BF} reste supérieur à $0,7$, le système sera plus rapide,
  - si ξ_{BF} reste inférieur à $0,7$, le système sera plus lent.

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 2ème ordre

- K_{BF} :

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K}$$

- ω_{0BF} :

- ξ_{BF} :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2ème ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2ème ordre ;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement ξ_{BF} lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO. Par conséquent si ξ_{BF} diminue et :
  - si ξ_{BF} reste supérieur à $0,7$, le système sera plus rapide,
  - si ξ_{BF} reste inférieur à $0,7$, le système sera plus lent.

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 2ème ordre

- K_{BF} :

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K}$$

- ω_{0BF} :

$$\omega_{0BF} = \sqrt{1+K} \cdot \omega_0$$

- ξ_{BF} :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2ème ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2ème ordre ;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement ξ_{BF} lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO. Par conséquent si ξ_{BF} diminue et :
  - si ξ_{BF} reste supérieur à $0,7$, le système sera plus rapide,
  - si ξ_{BF} reste inférieur à $0,7$, le système sera plus lent.

Rapidité des SLCI

Système bouclé du 2ème ordre

- K_{BF} :

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K}$$

- ω_{0BF} :

$$\omega_{0BF} = \sqrt{1+K} \cdot \omega_0$$

- ξ_{BF} :

$$\xi_{BF} = \frac{\omega_{0BF}}{2} \cdot \frac{2\xi}{(1+K)\omega_0} = \frac{\sqrt{1+K} \cdot \omega_0}{2} \cdot \frac{2\xi}{(1+K)\omega_0} = \frac{\xi}{\sqrt{1+K}}$$

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2ème ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2ème ordre ;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement ξ_{BF} lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO. Par conséquent si ξ_{BF} diminue et :
  - si ξ_{BF} reste supérieur à $0,7$, le système sera plus rapide,
  - si ξ_{BF} reste inférieur à $0,7$, le système sera plus lent.

Plan

1. Quantification de la précision
   - Définition de la précision
   - Erreur indicielle
   - Erreur de trainage
   - Erreur d'accélération
   - Récapitulatif
   - Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
   - Cas d'une perturbation
2. Rapidité des SLCI
   - Définition
   - Influence de l'ordre
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence du bouclage
     - Système du premier ordre
     - Système du deuxième ordre
   - Influence de la bande passante

Rapidité des SLCI

Bande passante de la FTBF

- La bande passante à $-n \cdot dB$ correspond à la bande de pulsation où le gain est supérieur au gain asymptotique des basses fréquences moins n décibels.
- Pour un 1er ordre la bande passante à $-3dB$ correspond à la puslation de cassure $\frac{1}{\tau}$.
- On peut montrer que plus la bande passante de la FTBF du système est importante plus le système sera rapide.