

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2024 - 2025



C7 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

C7-1 - Analyse fréquentielle des systèmes asservis : Introduction

25 Mars 2025



Vidéo 1

Table des matières

I Définition de l'analyse fréquentielle	2
II Intérêts de l'étude fréquentielle	2
III Définition du support du cours	4
IV Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique	5

Compétences

- **Analyser**
 - Identifier la structure d'un système asservi.
 - Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement.
- **Modéliser**
 - Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
 - Modéliser le signal d'entrée.
 - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Déterminer la réponse fréquentielle.
- **Communiquer**
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

Compétences

- **Modéliser :**
 - Identifier et caractériser les grandeurs physiques : caractéristiques fréquentielles
 - Systèmes linéaires continus et invariants
 - Signaux canoniques d'entrée : signaux sinusoïdaux
 - Schémas blocs, fonctions de transferts
- **Résoudre :** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
 - Réponse fréquentielle;

I. Définition de l'analyse fréquentielle

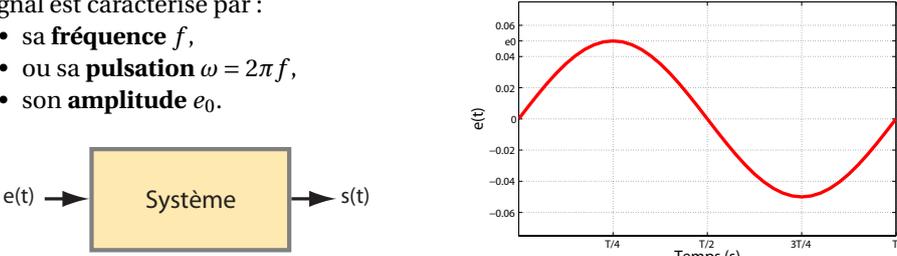
Définition 1 : Analyse fréquentielle ou harmonique

L'analyse fréquentielle d'un système linéaire, continu et invariant consiste à étudier la réponse ($s(t)$) vis à vis d'une entrée ($e(t)$) de type harmonique ou sinusoïdale :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) = e_0 \sin(2\pi f t) \quad (1)$$

Ce signal est caractérisé par :

- sa **fréquence** f ,
- ou sa **pulsation** $\omega = 2\pi f$,
- son **amplitude** e_0 .



The diagram shows a yellow box labeled 'Système' with an input arrow labeled 'e(t)' and an output arrow labeled 's(t)'. To the right is a graph of a sine wave 'e(t)' versus 'Temps (s)'. The y-axis ranges from -0.06 to 0.06 with a peak at 0.06. The x-axis has markers at T/4, T/2, and 3T/4. The wave starts at 0 at t=0, reaches a peak at T/4, crosses zero at T/2, reaches a trough at 3T/4, and returns to zero at T.

II. Intérêts de l'étude fréquentielle

Définition 2 : Décomposition en série de Fourier

Tout signal **périodique** se décompose en une **somme de signaux harmoniques** (e.g. sinusoïdale). Par exemple un signal périodique et impaire de fréquence f peut se décomposer de la façon suivante :

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (2)$$

où les coefficients a_k représente les différentes amplitudes des fonctions harmonique constituant la décomposition.

Remarque 1 :

Dans la pratique, pour reconstituer un signal, on peut effectuer une **décomposition finie** en série de Fourier ($\tilde{e}(t)$) en prenant n termes :

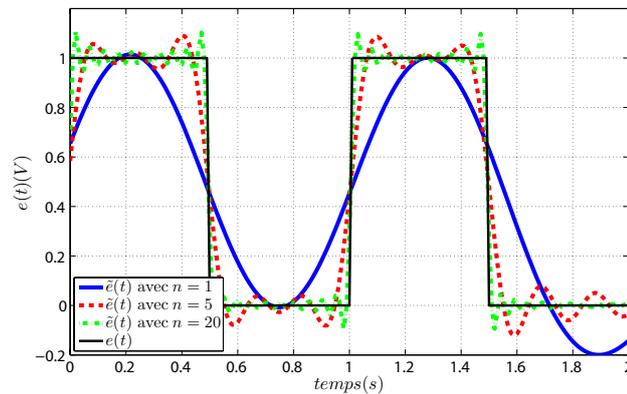
$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (3)$$

La précision de la décomposition sera alors d'autant plus fidèle au signal de départ que le nombre de termes (n) sera grand.



Exemple 1 : Reconstitution d'un signal carré périodique

Prenons l'exemple d'un signal de tension $e(t)$ de type créneau d'une période $T = 1/f$ égale à 1 s et d'amplitude égale à 1 V. On peut effectuer une décomposition finie $\tilde{e}(t)$ (équation 3) avec différentes valeurs de n (e.g. {1, 5, 20}). La figure suivante compare la "richesse" des différentes décompositions finies en série de Fourier de $e(t)$. On remarque bien que plus n est grand plus le signal reconstitué ($\tilde{e}(t)$) se rapproche du signal initial ($e(t)$).



Propriété 1 : Étude d'un signal quelconque

Pour étudier la réponse d'un système vis-à-vis d'un signal quelconque, il faudra alors être capable de caractériser **la réponse fréquentielle** sur une plage de fréquence (f) ou de pulsation (ω) étendue. On peut également choisir cette méthode d'analyse pour vérifier le comportement d'un système vis à vis d'une entrée harmonique caractérisée par différentes valeurs de fréquence (f) ou de pulsation (ω).

III. Définition du support du cours



Exemple 2 : Suspension de véhicule

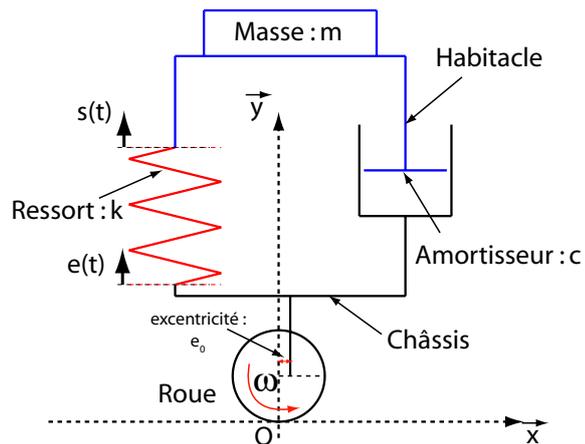
On modélise une suspension d'un véhicule par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient d'amortissement c , montés en parallèles. On ramène le poids du véhicule à une masse globale m . Dans un premier temps, nous prendrons comme valeurs numériques des différents paramètres :

- $m = 100 \text{ kg}$,
- $c = 1,13 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$,
- $k = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$.

On note respectivement $e(t)$ et $s(t)$ les déplacements verticaux (suivant \vec{y}) du châssis et de l'habitacle par rapport à la position d'équilibre du système. La rotation constante de la roue avec une vitesse angulaire ω entraîne un déplacement horizontal du véhicule à vitesse constante selon la direction $-\vec{x}$. Ainsi le repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y})$ peut être supposé comme galiléen. L'axe de la roue est légèrement excentré par rapport à son centre. Ceci provoque donc un déplacement du châssis en fonction de la vitesse de rotation de la roue ω .

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$

On se propose de modéliser la réponse en déplacement vertical (suivant \vec{y}) de l'habitacle ($s(t)$) en fonction de la pulsation ω .



Le Principe Fondamental de la Dynamique en résultante suivant la direction \vec{y} appliqué à l'habitacle par rapport au repère R_0 donne l'équation différentielle suivante :

$$-c \left(\frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

La fonction de transfert du système $H(p) = S(p)/E(p)$ est égale à (forme canonique) :

Avec $\tau = 2\xi/\omega_0$.

IV. Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

La transformée de Laplace de l'entrée harmonique ($e(t)$ équation 1) est donnée par :

$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Dans le domaine de Laplace la sortie $S(p)$ du système soumis à une entrée harmonique s'écrit :

On obtient alors avec une transformée de Laplace inverse : ,

$$S(t) = e_0 \left[\frac{G}{2j} \left(-e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] = e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)]$$

Or, on rappelle que $a < 0$ (ici $a = -\frac{c}{2m}$) et donc $e^{a t} Q(t)$ tend vers 0 en $+\infty$. Cette partie s'annule donc une fois que le régime est permanent ou établi et représente le **régime transitoire**.

Définition 3 : Réponse fréquentielle en régime permanent

Ainsi, en **régime établi** ou permanent la sortie $s(t)$ est égale à :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

- $G = \frac{s_0}{e_0} = |H(j\omega)|$ caractérise le **gain** (c'est à dire le facteur d'amplitude du sinus),
- $\varphi = \arg(H(j\omega))$ est le **déphasage** (c'est à dire l'avance ou le retard du sinus).

Remarque 2 : Cas général

Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de **stabilité** et avec des **conditions initiales nulles** le résultat précédent est encore valable.

Conclusion :

L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier le gain fréquentielle G , ainsi que la phase φ de la fonction de transfert $H(p)$ en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f .

On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "**lieux de transfert**".