C6 : Analyse temporelle des systèmes asservis
C6-1 : Analyse temporelle des systemes asservis du 1er ordre

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
11 Mars 2025

Plan

Plan

Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\ e(t).} \tag{1}$$

Remarque

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t) sont toujours nulles** *:*

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0)=0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0)=0$

Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\ e(t).} \qquad (1)$$

Remarque

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t) sont toujours nulles** *:*

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0)=0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0)=0$

Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\ e(t).} \tag{1}$$

Remarque

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t) sont toujours nulles** *:*

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0)=0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0)=0$

Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}} \tag{2}$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}} \quad (2)$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

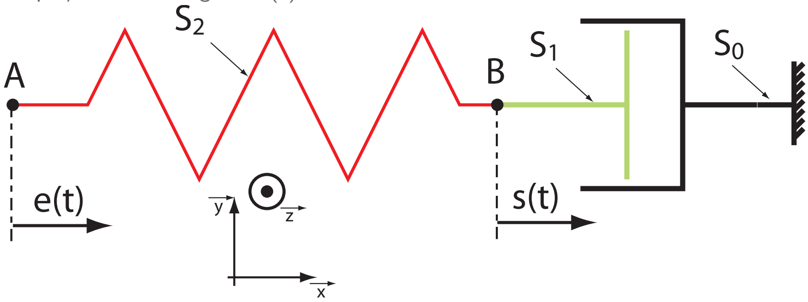
$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}} \tag{2}$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

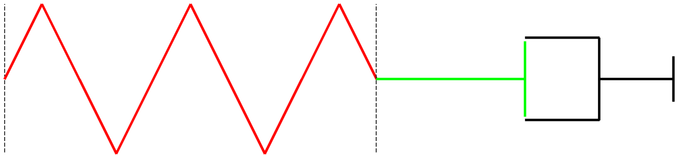
Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k **et amortisseur de coefficient** c
On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



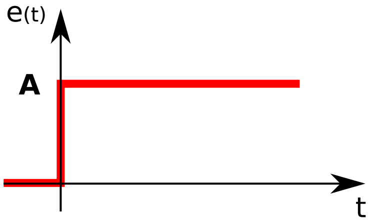
Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c
On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



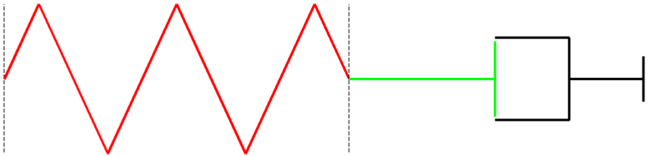
On impose un échelon sur le déplacement $e(t)$:

$$e(t=0)=0$$



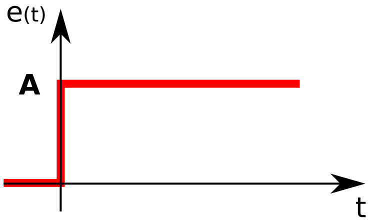
Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k **et amortisseur de coefficient** c
On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



On impose un échelon sur le déplacement $e(t)$:

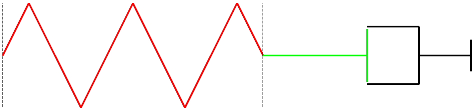
$$e(t = 0^+) = e0$$



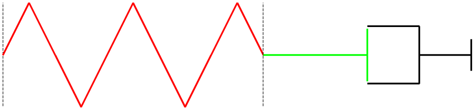
Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c
Question : Comment le système va répondre ?

Système oscillant

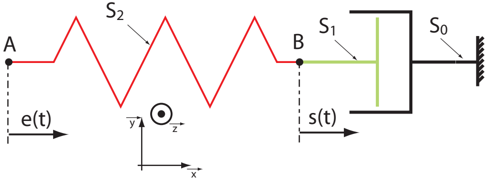


Système amorti



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant $\overrightarrow{x}$:

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

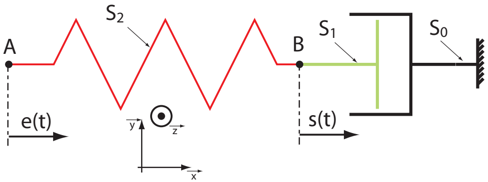
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1.

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant $\overrightarrow{x}$:

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

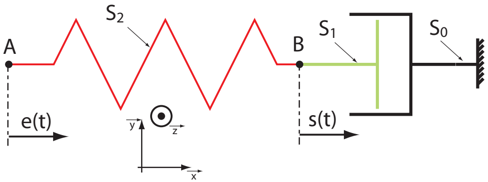
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1.

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant $\overrightarrow{x}$:

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

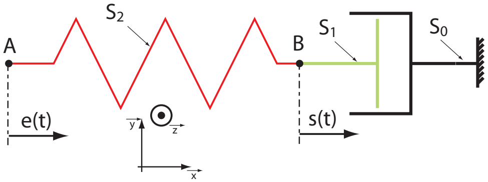
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1.

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\overrightarrow{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

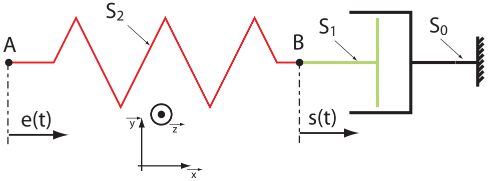
- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \quad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0)=0$).

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k **et amortisseur de coefficient** c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\overrightarrow{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

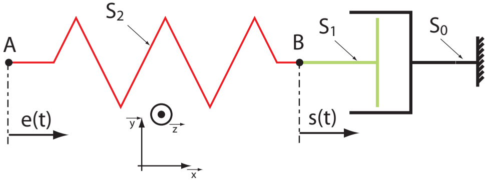
- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \qquad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0)=0$).

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\vec{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

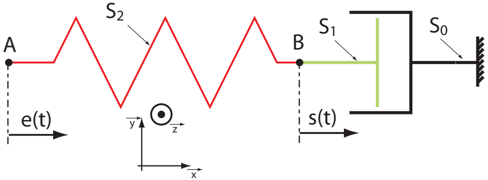
- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \quad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0)=0$).

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\overrightarrow{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \qquad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0)=0$).

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Plan

1. Définitions
   - Système du premier ordre
   - Exemple du cours
2. Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre
   - Réponse à un échelon
   - Réponse à une rampe

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 \cdot u(t).$$

Si $e_0 = 1$, la réponse $e(t)$ est appelée **réponse indicielle**.

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

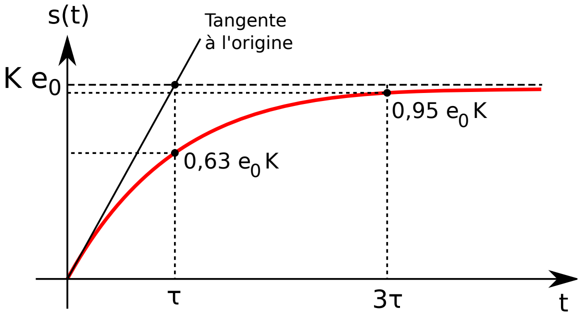
$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{e_0}{p} \\ S(p) &= H(p) \cdot E(p) \\ &= \left(\frac{K}{1+\tau p}\right) \frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

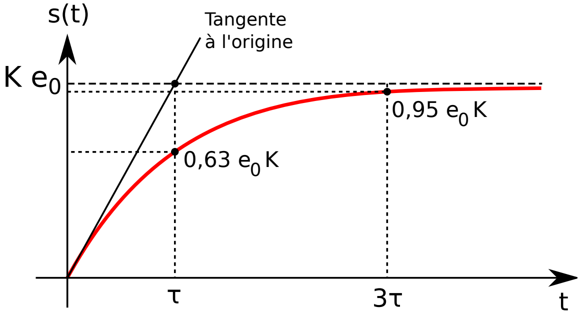
Réponse à un échelon

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$\boxed{s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot u(t).} \quad (4)$$



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



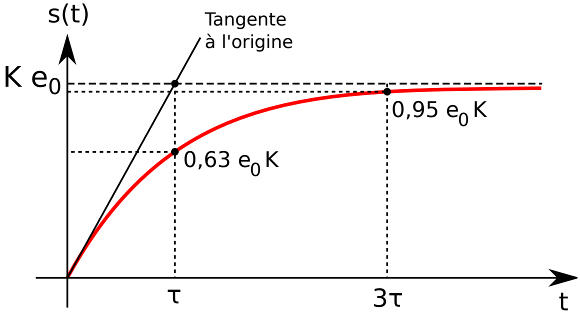
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \ldots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \ldots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot S(p) = Ke_0$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p \to 0} p^2 \cdot S(p) = 0$$

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \lim_{p \to +\infty} p \cdot S(p) = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p \to +\infty} p^2 \cdot S(p) = \frac{K \cdot e_0}{\tau}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Propriétés

- La réponse indicielle à un système du 1^{er} ordre possède :
  - une **asymptote horizontale au voisinage de** $+\infty$ d'ordonnée à l'origine $K \cdot e_0$,
  - une **tangente à l'origine de coefficient directeur** $\frac{K \cdot e_0}{\tau}$.
- La **rapidité** d'une réponse à un échelon pour un premier ordre est quantifiée par le **temps de réponse à** 5% (noté t_r) :

$$\boxed{t_r \approx 3\,\tau.} \tag{5}$$

- La **Précision** de la réponse à un échelon peut être indiquée par **l'erreur statique**, noté ε_s. Elle s'obtient en recherchant l'écart au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t))} \tag{6}$$

- L'erreur statique ε_s d'un système du 1^{er} ordre de **gain unitaire** soumis à un échelon est nulle :

$$\boxed{\varepsilon_s = 0.} \tag{7}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la rapidité

Calculons le temps de réponse à 5% pour un premier ordre

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la rapidité

$$s_{(t_r)} = K\ e_0 \left(1 - e^{-t_r/\tau}\right) = 0,95\ K\ e_0$$
$$\Leftrightarrow t_r = -\tau \ln(0,05)$$

avec $\ln(0.05) \approx -3$.

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la précision

Pour illustrer cela, prenons un gain $K = 1$. D'après le raisonnement suivant :

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la précision

$$\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \to 0} p \cdot (E(p) - H(p) \cdot E(p))$$

$$= \lim_{p \to 0} p \cdot E(p) \left(1 - \frac{1}{1 + \tau p}\right) = \lim_{p \to 0} p \cdot \frac{e_0}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \tau p}\right)$$

$$= \lim_{p \to 0} e_0 \left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Attention

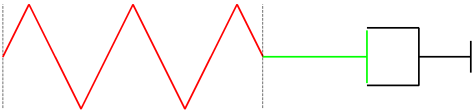
Verifier l'homogénéité ! ! !

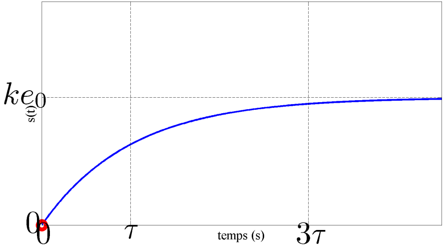
$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} \left(K\ e(t) - s(t) \right).} \quad (8)$$

Dans tous les cas

$$\boxed{\varepsilon_s = 0.} \quad (9)$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon





Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

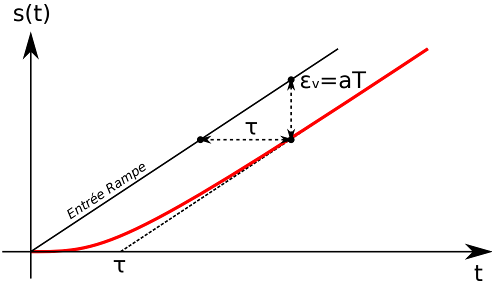
$$E(p) = \frac{a}{p^2}$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \left(\frac{K}{1+\tau p}\right)\frac{a}{p^2} = K\ a\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau p}\right)$$

Après transformée inverse, on obtient :
La réponse d'un système du 1^{er} ordre soumis à une rampe est de la forme :

$$\boxed{s(t) = K\ a\left(t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right)\ u(t).} \tag{10}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



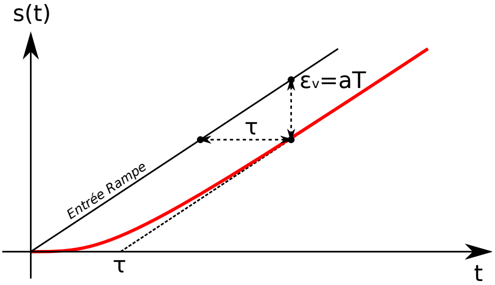
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \ldots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \ldots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to0} p\,S(p) = \lim_{p\to0} \frac{K\ a}{p\,(1+\tau p)} = +\infty$$

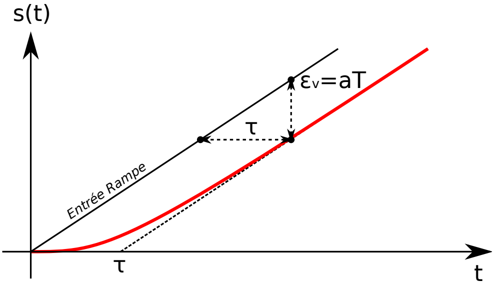
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{ds(t)}{dt} = K\ a$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t\to0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} p\,S(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{K\ a}{p\,(1+\tau p)} = 0$$

$$\lim_{t\to0} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

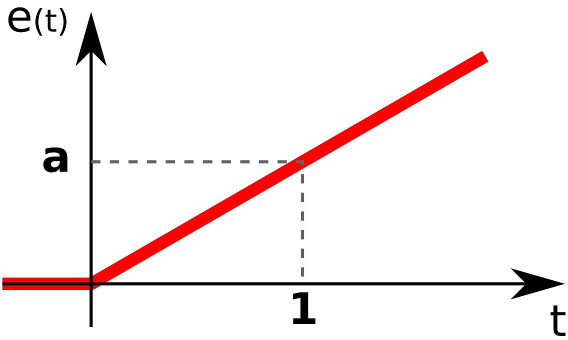
Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Propriétés

- une **tangente horizontale au voisinage de** 0,
- une **asymptote oblique, de coefficient directeur** $K\ a$.

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe

Propriétés

- La réponse d'un système du 1^{er} ordre à une rampe possède :
  - **une tangente horizontale au voisinage de** 0,
  - **une asymptote oblique, de coefficient directeur** $K\ a$ car une asymptote oblique d'équation $y_{(t)} = a\,(t - \tau)$ au voisinage de $+\infty$.
- • **Précision :** Pour $K = 1$, on trouve :

$$\boxed{\varepsilon_v = a\,\tau.} \tag{11}$$

- • **Rapidité :** La rapidité d'une réponse à une rampe d'un système du 1^{er} ordre peut se caractériser par un **retard de traînage** r_t :

$$\boxed{r_t = \tau.} \tag{12}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion

Réponse à une impulsion :

On considère maintenant un dirac :

$$e(t) = a \cdot \delta t.$$

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

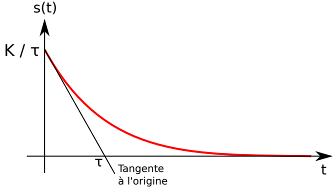
$$E(p) = 1$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \left(\frac{K}{1+\tau p}\right) \times 1 = \frac{K}{\tau}\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$$

Après transformée inverse, on obtient :
la réponse temporelle d'un système du 1^{er} ordre à une impulsion a pour équation :

$$\boxed{s(t) = \frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}.} \tag{13}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion



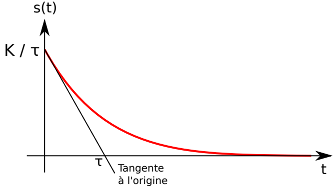
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \ldots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \ldots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion



Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \lim_{p \to +\infty} p\, S(p)$$
$$= \lim_{p \to +\infty} \frac{K\, p}{1+\tau p}$$
$$= \frac{K}{\tau}$$
$$\lim_{t \to 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p \to +\infty} p \left[p \frac{K}{1+\tau p} - \frac{K}{\tau} \right]$$
$$= \lim_{p \to +\infty} p \left[\frac{pK\tau - K - pK\tau}{\tau\,(1+\tau p)} \right] = \lim_{p \to +\infty} -\frac{-K\, p}{\tau\,(1+\tau\, p)}$$
$$= -\frac{K}{\tau^2}$$

Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} p\, S(p)$$
$$= \lim_{p \to 0} \frac{K\, p}{1+\tau p}$$
$$= 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion

Propriétés

La réponse d'une système du 1^{er} ordre sollicité par un Dirac possède :

- **une asymptote horizontale** d'équation $s(t) = 0$ au voisinage de $+\infty$,
- **une tangente d'équation d'équation** $s(t) = -\frac{K}{\tau^2}t + \frac{K}{\tau}$ au voisinage de 0.