

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2024 - 2025



C4 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE STRUCTURELLE DES SYSTÈMES

## TD 9 - Modélisation cinématique des liaisons mécaniques (C4-1)

### Compétences

- **Modéliser**
  - Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.
  - Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
- **Communiquer**
  - Lire et décoder un document technique : Schéma Cinématique

## Exercice 1 : Modélisation du Robucar

Source : e3a 2015 MP SII

### 1 Présentation du sujet

#### a) Contexte

Le système étudié dans ce sujet est un démonstrateur de véhicules intelligents dotés de la fonctionnalité "d'accrochage télémétrique" qui consiste au suivi en toute sécurité et à distance fixe entre un véhicule maître (leader) et un ou plusieurs véhicules suiveurs (esclave). le laboratoire d'Automatique Génie Informatique et Signal (LAGIS UMR8219) situé à Polytech-Lille utilise un démonstrateur composé d'un véhicule maître et deux véhicules suiveurs dont on peut voir l'architecture sur la figure 1.

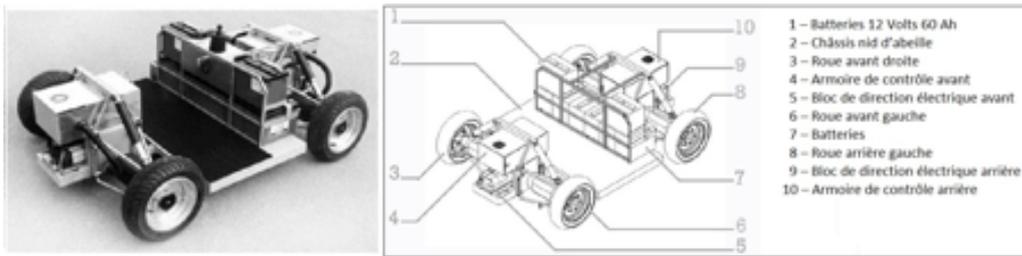


FIGURE 1 – Ensemble Châssis - Train roulant du véhicule RobuCar

**b) Architecture du système**

Le véhicule suiveur intelligent est un châssis à quatre roues motrices et directrices pilotables séparément (figure 1). Il y a donc deux paramètres de commande pour chaque roue (orientation (direction), vitesse de rotation (motricité)). Le schéma suivant (figure 2) présente un diagramme de bloc interne pour une roue.

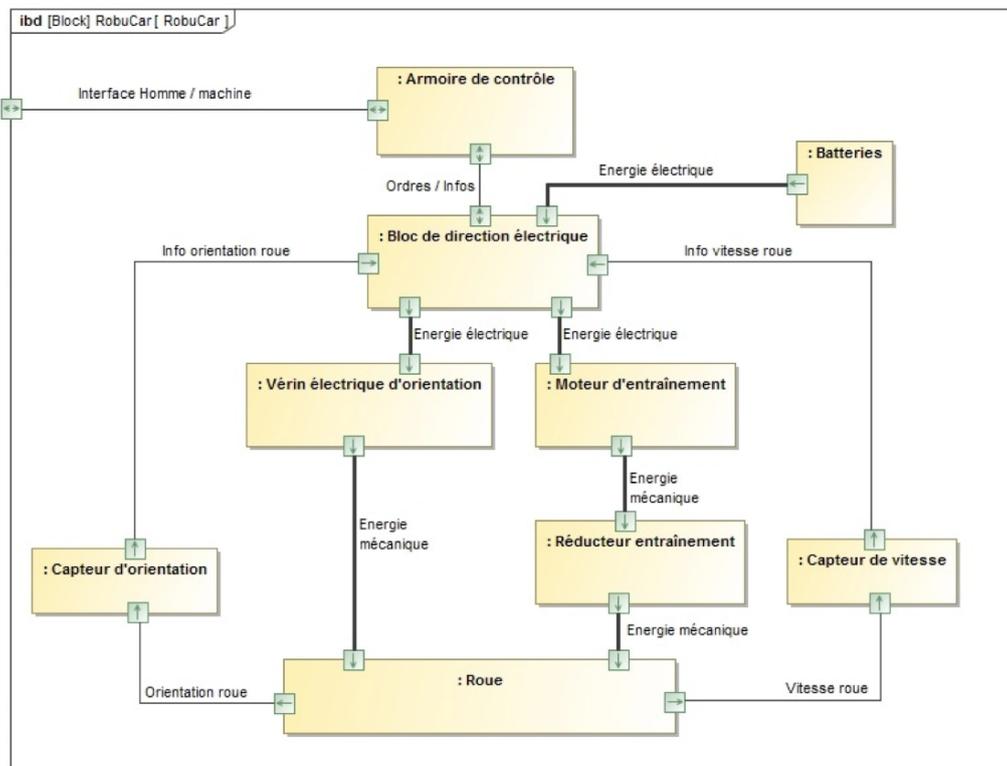


FIGURE 2 – Diagramme de bloc interne pour une roue du véhicule RobuCar

**c) Étude du suivi de trajectoire / Modélisation du virage**

On considère que les virages sont effectués en pilotant de façon conjuguée les orientations des trains avant et arrière conformément au modèle de la figure 4. De cette façon à la valeur près des paramètres a et b, le pilotage du train arrière (roues 3 et 4) est une image du pilotage du train avant (roues 1 et 2).

- Le pilotage conjugué des directions avant et arrière conduit à l'identification d'un point M de l'axe longitudinal du châssis défini par rapport à C, centre de la trajectoire circulaire à l'instant t par :  $CM \cdot \vec{X} = 0$  avec  $\vec{CM} = -\rho \cdot \vec{Y}$ .
- On définit les bases suivantes :
  - $B_0 = (\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  liée au sol,
  - $B_S = (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0)$  liée au châssis du véhicule,

- $B_i = (\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_0)$  liée à l'axe de la roue  $i$ .
- Le point  $O_i$  : point du plan médian de la roue  $i$  appartenant à l'axe de rotation (cf figure 3).
- Le mouvement du véhicule (châssis  $S$ ) par rapport au sol ( $S_0$ ) est un mouvement de rotation autour du point  $C$ .
- On note que le taux de changement d'orientation du châssis par rapport au repère fixe lié au sol, dû à la trajectoire circulaire autour de  $C$  est :  $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi} \cdot \vec{Z}_0$ .
- On note  $V$  la vitesse du point  $M$  :  $\vec{V}(M \in S/R_0) = V \cdot \vec{X} = \rho \cdot \dot{\psi} \vec{X}$  avec  $V$  constant.
- Chaque roue  $i$  est en mouvement de rotation par rapport au châssis ( $S$ ) selon l'axe  $(O_i, \vec{Y}_i)$
- On note  $\vec{\Omega}(Roue_i/S) = \dot{\theta}_i \cdot \vec{Y}_i$  vitesse de rotation de la roue  $i$  par rapport au châssis du véhicule (selon à l'axe de la roue  $i$ ).
- $R$  : la valeur du rayon des roues.
- il y a **roulement sans glissement** entre chaque roue  $i$  et le sol en  $J_i$ .
- l'inclinaison de chaque axe de roue par rapport au châssis selon l'axe vertical  $(O_i, \vec{Z}_0)$  est donné par l'angle  $\delta_i$  avec  $\delta_i = (\vec{X}, \vec{X}_1) = (\vec{Y}, \vec{Y}_1)$ .



### Objectif 1 :

L'objectif de cette étude est de donner la relation entre le rayon de courbure du virage emprunté par le véhicule  $\rho$  et les paramètres d'inclinaison des axes des roues  $\delta_1$  et  $\delta_2$  ainsi que les vitesses de rotation des roues à imposer ( $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ ).

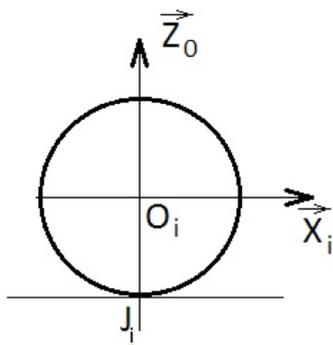


FIGURE 3 - Modélisation du contact roue/sol dans le plan médian de la roue

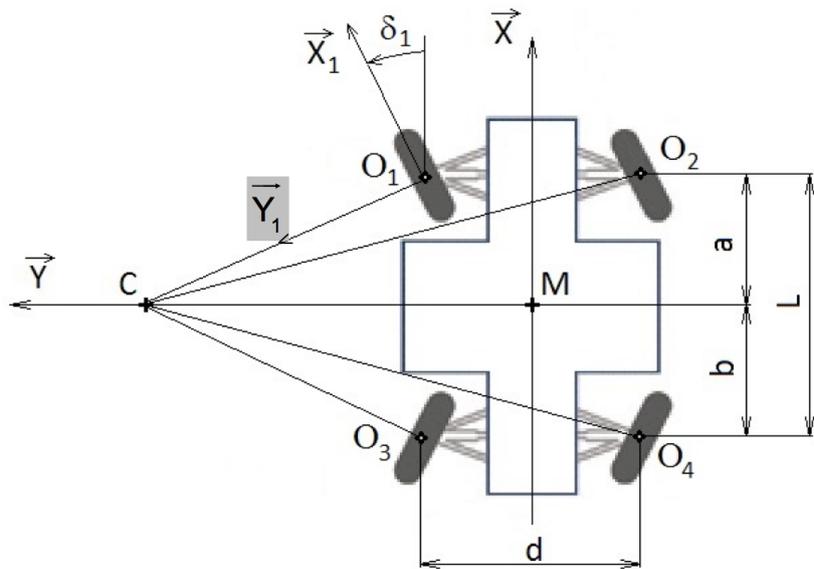


FIGURE 4 - Véhicule en virage vue du dessus

**Q 1 :** En utilisant la propriété du mouvement du châssis  $S$  par rapport au sol ( $S_0$ ) donner la vitesse  $\vec{V}(C \in S/sol)$ . En déduire l'expression du torseur  $\{V(S/S_0)\}$  décrivant le mouvement de  $S/sol$  en  $C$ .

**Q 2 :** Donner l'expression vectorielle dans la base  $B_S$  de  $\vec{V}(O_1 \in S/Sol)$  et  $\vec{V}(O_2 \in S/Sol)$  en fonction de  $\rho$ ,  $a$ ,  $d$  et  $\dot{\psi}$  en utilisant le formule de changement de point.

**Q 3 :** En utilisant la propriété du mouvement de chaque roue  $i$  par rapport au châssis ( $S$ ) donner l'expression du torseur  $\{V(Roue_i/S)\}$  décrivant le mouvement de  $Roue_i/S$  en  $O_i$ .

**Q 4 :** Traduire les conditions de roulement sans glissement entre chaque roue  $i$  et le sol  $J_i$ .

**Q 5 :** Par composition de mouvement donner l'expression du vecteur de rotation instantané traduisant le mouvement de la roue  $i$  par rapport au sol  $S_0$  :  $\vec{\Omega}(roue_i/S_0)$ . En déduire l'expression du torseur  $\{V(Roue_i/S_0)\}$  décrivant le mouvement de  $Roue_i/S_0$  en  $J_i$ .

**Q 6 :** Donner l'expression vectorielle dans la base  $B_i$  de  $\vec{V}(O_1 \in Roue_1/Sol)$  et  $\vec{V}(O_2 \in Roue_2/Sol)$  en fonction de  $R$  et  $\dot{\theta}_i$ .

**Q 7 :** En remarquant que  $\vec{V}(O_1 \in Roue_1/Chassis) = \vec{0}$ , établir deux relations scalaires après projection dans la base  $B_S$ .

**Q 8 :** Faire de même pour la roue 2.

**Q 9 :** En déduire les expressions de  $\tan(\delta_1)$  et de  $\tan(\delta_2)$  en fonction de  $\rho$ ,  $a$  et  $d$ . Effectuer l'application numérique.  $a = 0,65m$ ;  $d = 1,2m$ ;  $\rho = 5m$ .

**Q 10 :** Étant donné les valeurs de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , on adopte la simplification suivante :  $\cos \delta_i \approx 1$  et  $\sin \delta_i \approx 0$ . En déduire les expressions simplifiées de  $\theta_1$  et de  $\theta_2$ .

## Exercice 2 : Modélisation d'une souris mécanique

**Source :** Raphael Allais

### 1 présentation et paramétrage

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une souris mécanique associée à un ordinateur (figure 5).

L'ensemble des paramétrage indiqués ci-dessous font référence à la figure 6.

- Le plan de travail (0) est lié au repère  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- Le cadre lié à la souris porte le numéro (1). On lui lie un repère  $R_1 = (C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- En fonctionnement normal, la bille (2) de rayon  $R$  roule sans glisser sur le plan (0). On note  $I$  le point de contact avec le sol (0).
- Le galet (3), de rayon  $a$  est en liaison pivot d'axe  $(L, \vec{y}_1)$ , avec le cadre (1).
- Le galet (4), de rayon  $a$  est en liaison pivot d'axe  $(M, \vec{x}_1)$ , avec le cadre (1).

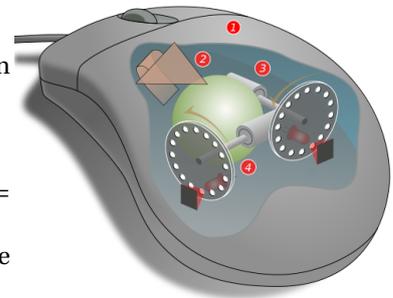


FIGURE 5 – Dessin du mécanisme d'une souris de micro-ordinateur.

Les deux galets (3) et (4) commandent chacun un capteur de position angulaire (codeur incrémental). En fonctionnement normal, ils **roulent sans glisser** sur la bille (2), respectivement aux points  $J$  et  $K$ .

On notera :

- $\vec{\Omega}_{(3/1)} = \omega_{31} \vec{y}_1$  le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (3) par rapport à (1).
- $\vec{\Omega}_{(4/1)} = \omega_{41} \vec{x}_1$  le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (4) par rapport à (1).

La souris (1) est animée d'un mouvement plan par rapport à (0).



#### Objectif :

Le but de cet exercice est de trouver les valeurs de  $\omega_{31}$  et  $\omega_{41}$  en fonction du déplacement de la souris.

La condition de contact en  $I$  impose que :  $\vec{OC} \cdot \vec{z}_0 = R$ .

La position de la souris (1) par rapport à (0) est alors donnée par :

$$\vec{OC} = x \vec{x}_1 + y \vec{y}_1 + R \vec{z}_1$$

$$\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$$

$$\text{avec } \vec{z}_0 = \nu_z \vec{1}$$

On note le torseur cinématique de la bille (2) par rapport au cadre (1) par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{(2/1)} = p \vec{x}_1 + q \vec{y}_1 + r \vec{z}_1 \\ \vec{V}(C \in 2/1) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

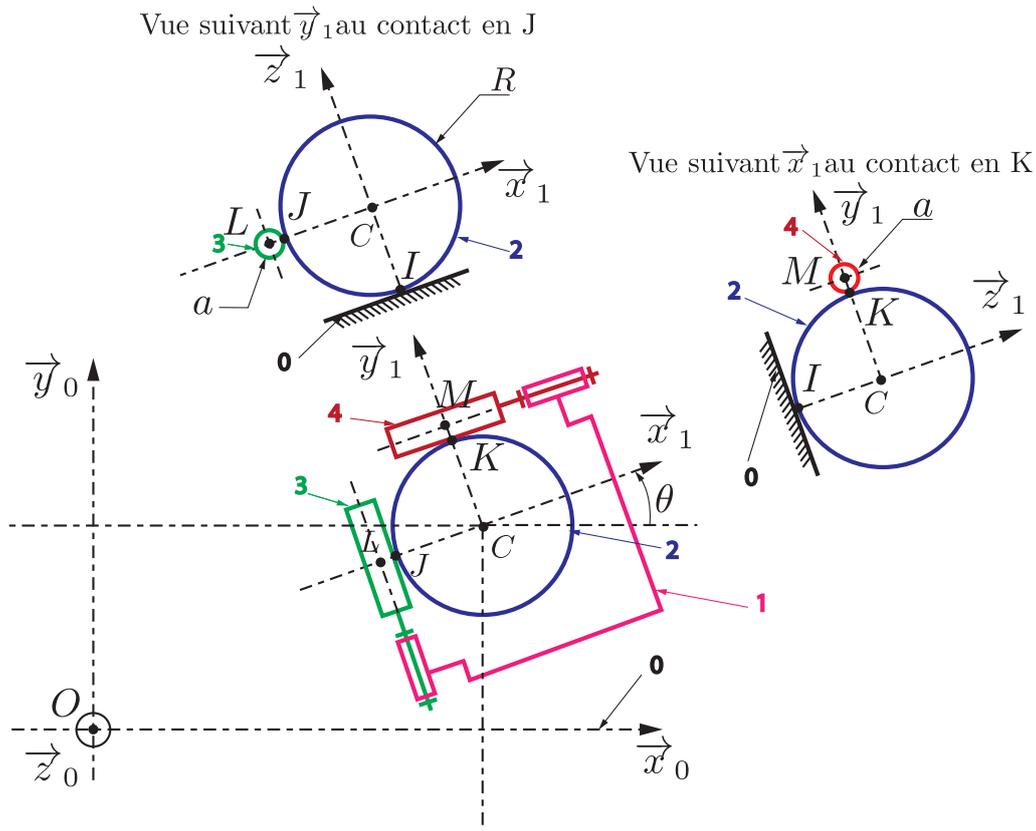


FIGURE 6 – Schéma cinématique mécanique d'une souris de micro-ordinateur.

(Pour l'instant,  $p$ ,  $q$  et  $r$  ne sont pas connus.)

Supposons que l'on bouge la souris (i.e. le cadre (1)) par rapport à (0) par le mouvement plan suivant :

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{(1/0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \vec{V}(C \in 1/0) = \dot{x} \vec{x}_1 + \dot{y} \vec{y}_1 \end{array} \right\}$$

## 2 Modélisation cinématique

**Modélisation globale de la bille et de la souris** Q 11 : En analysant les torseurs cinématiques donnés précédemment, proposer une liaison permettant de modéliser les mouvements de 1/0 et de 2/0

**Roulement sans glissement de la bille** Q 12 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point  $I$ .

Q 13 : Par composition des vitesses, en déduire la relation liant les paramètres du mouvement de la boule (issus de  $\{\mathcal{V}_{(2/1)}\}$ ) à ceux du mouvement de la souris (issu de  $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$ ).

Q 14 : En déduire les composantes  $p$  et  $q$  du vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{(2/1)}$ , en fonction du mouvement de la souris.

**Roulement du galet (3)** Q 15 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point  $J$ .

Q 16 : En déduire le vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{(3/1)}$ .

Q 17 : En déduire également la valeur de la composante  $r$  de  $\overrightarrow{\Omega}_{(2/1)}$ .

**Roulement du galet (4)** Q 18 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point  $K$ .

Q 19 : En déduire le vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{(4/1)}$ .

**Mouvement global** Q 20 : Exprimez alors les éléments de réduction des torseurs  $\{\mathcal{V}_{(2/1)}\}$ ,  $\{\mathcal{V}_{(3/1)}\}$  et  $\{\mathcal{V}_{(4/1)}\}$ , respectivement aux points  $C$ ,  $L$  et  $M$ , en fonction des composantes de  $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$ .

Q 21 : De quels types sont ces torseurs ?