

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C8 : ANALYSE DES PERFORMANCES DES SYSTÈMES ASSERVIS

## TD 18 - Précision et rapidité des systèmes asservis (C8-2)

### Compétences

- **Modéliser**
  - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
- **Résoudre**
  - Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
  - Déterminer la réponse fréquentielle.
  - Déterminer les performances d'un système asservi.

## Exercice 1 : Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie

**Source :** CCINP MP 2015

### 1 Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni figure 1, est guidée en translation suivant  $\vec{y}$  par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant  $\vec{x}$  par rapport au bâti.

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe  $\vec{z}$ ) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crémaillère.

### 2 Réglage de l'asservissement

La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous :

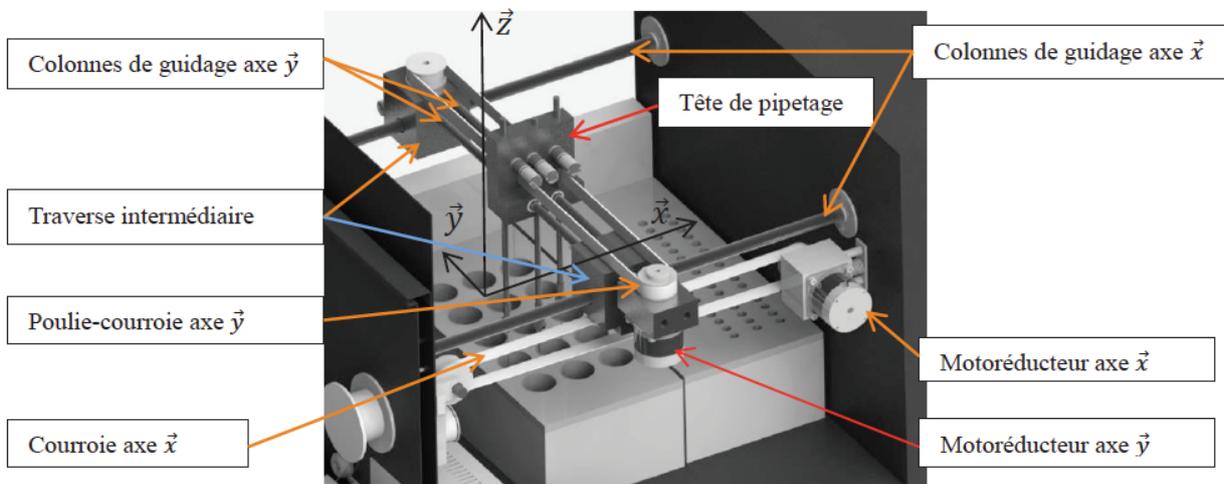
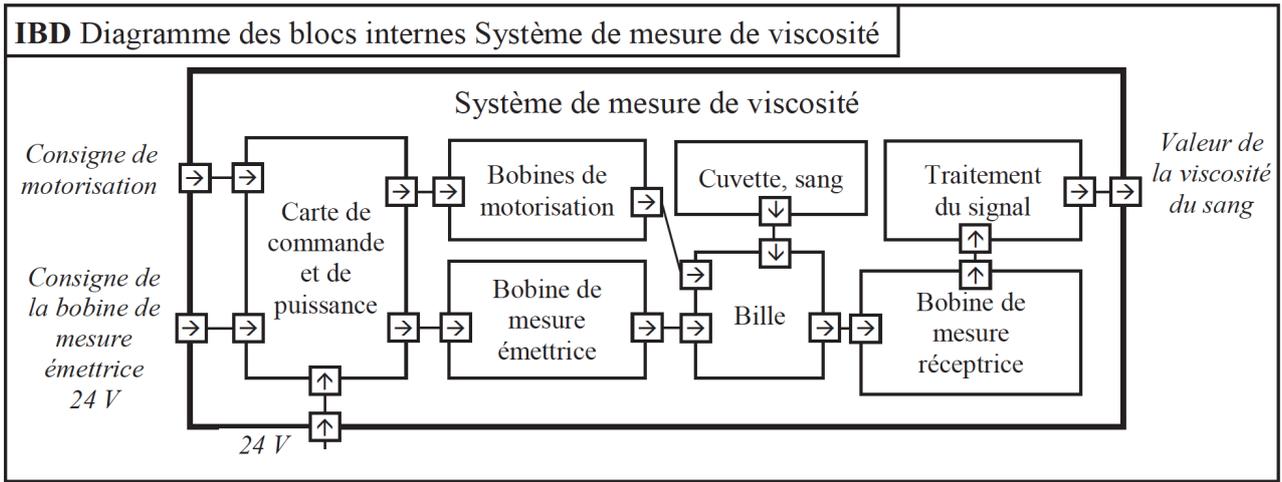
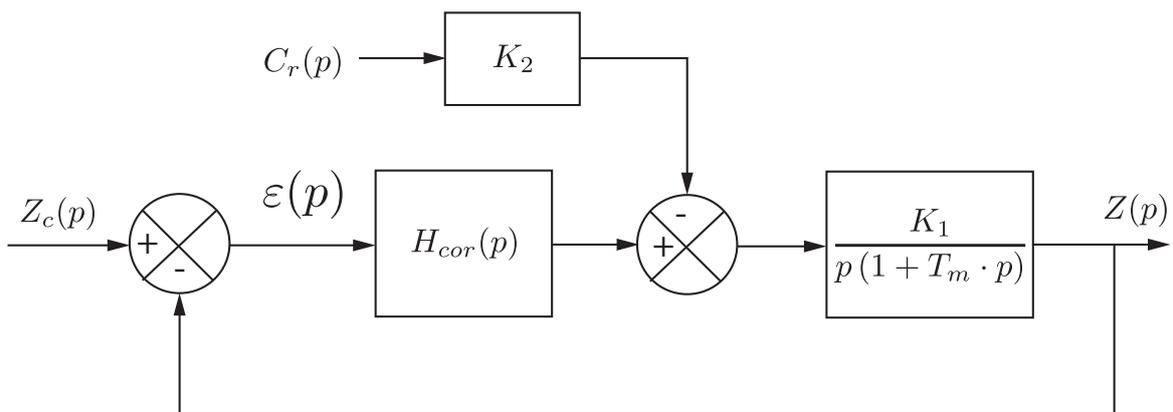


FIGURE 1 – Diagramme de bloc interne et présentation de l'architecture du système de mesure et du système de guidage



avec  $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} N^{-1}$ ,  $K_1 = 856 s^{-1}$ ,  $T_m = 3 \cdot 10^{-2} s$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} N \cdot m$ .

On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{cor}(p) = K_p$ .

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel (figure 2).

**Q 1 : Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p) = \left( \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$  ainsi que la**

**fonction de transfert  $H_{cr}(p) = \left( \frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$ .**

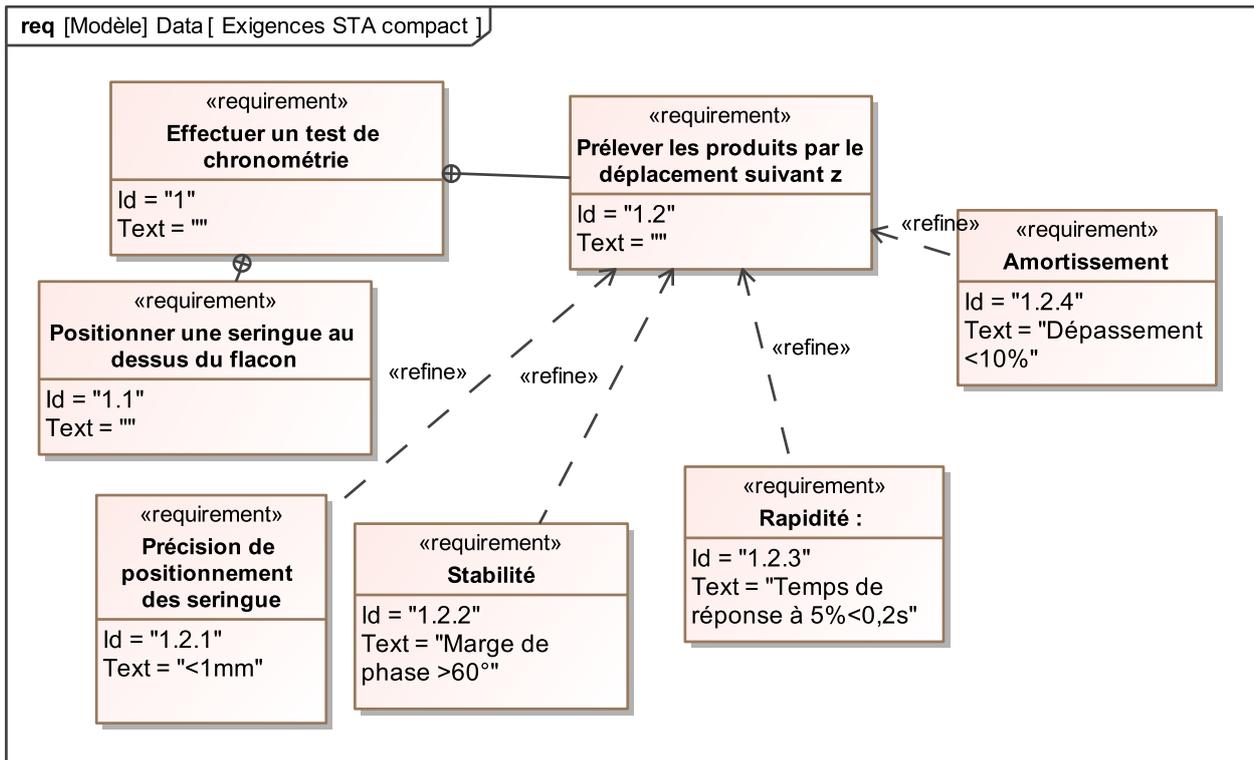


FIGURE 2 – Diagramme des exigences

**Q 2 :** Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $Z_c = 0$ ). En déduire la valeur de  $K_p$  pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

**Q 3 :** Sur le document réponse de la figure (3) compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p$  déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

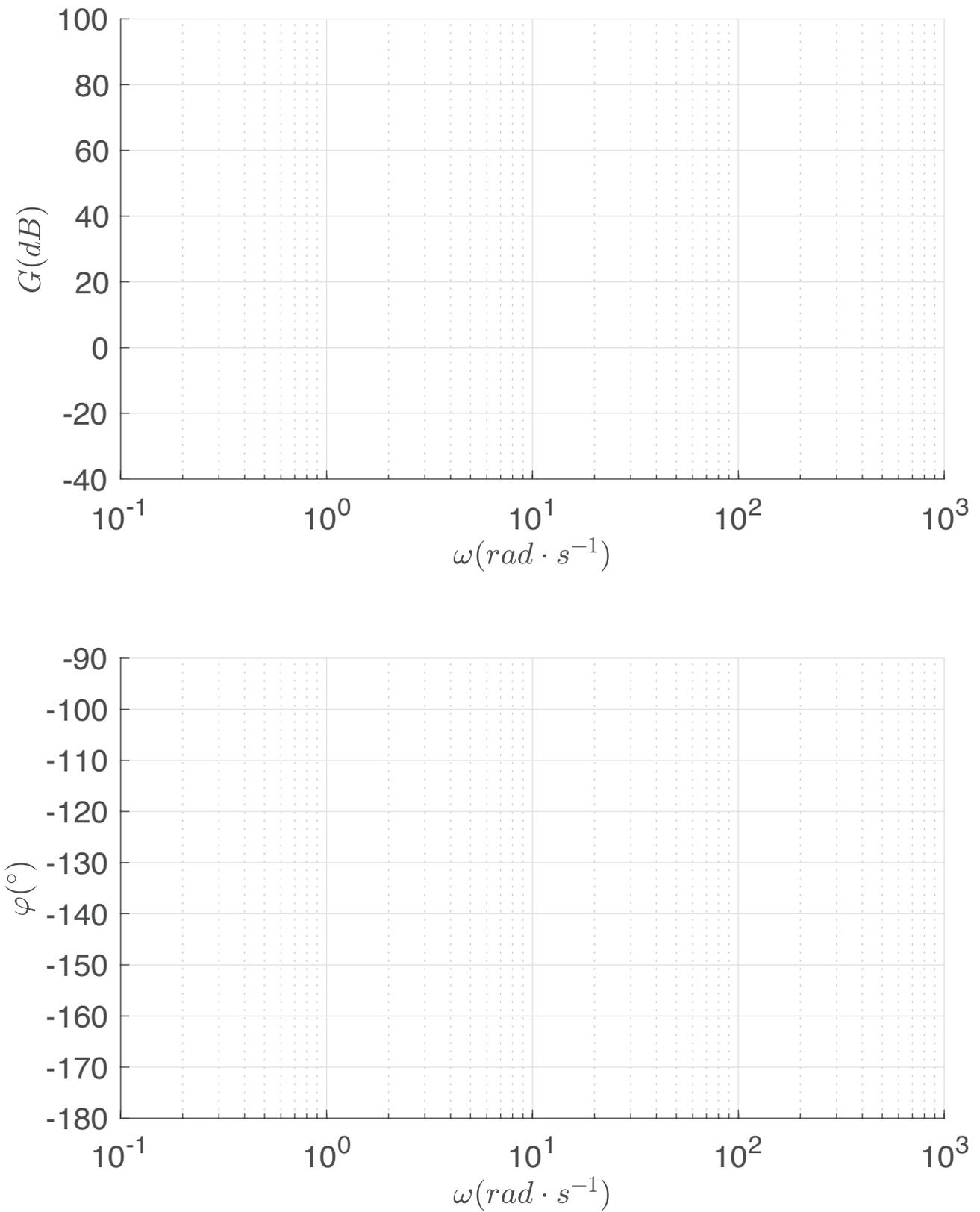
Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1s$ .

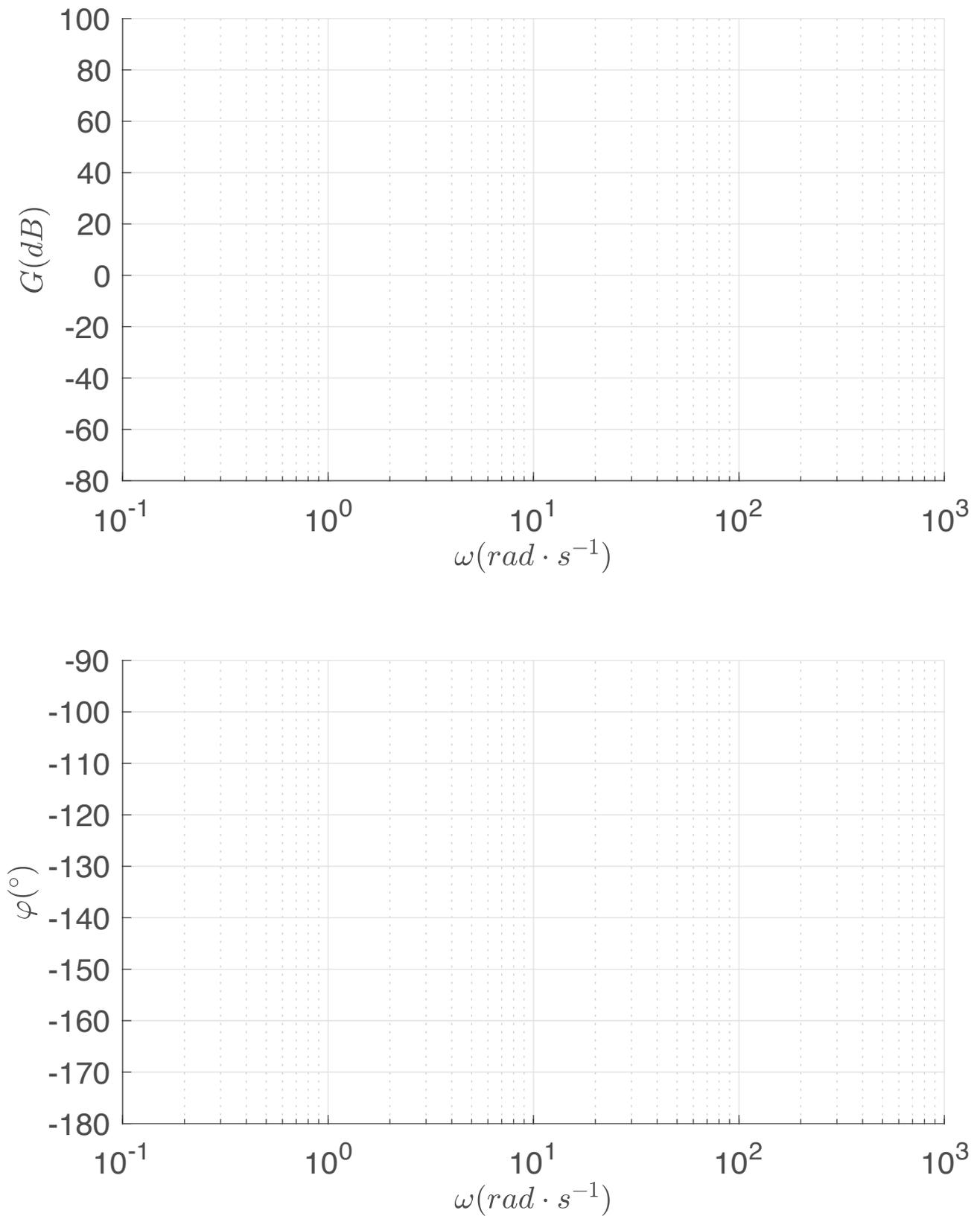
**Q 4 :** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1s$  sur la figure 4.

**Q 5 :** On souhaite une marge de phase d'au moins  $60^\circ$ . Proposer un réglage de  $K_p$  pour satisfaire au cahier des charges. Justifier vos calculs par les tracés nécessaires sur la figure 4.

**Q 6 :** La figure 5 donne la réponse à un échelon de position de  $50mm$  avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

**Q 7 :** Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé (figure 6.)

FIGURE 3 – Diagramme de Bode de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p = 1$

FIGURE 4 – Diagramme de Bode de  $H_{bo}(p)$  avec un correcteur PI pour  $K_p = 1$  et  $T_i = 1s$

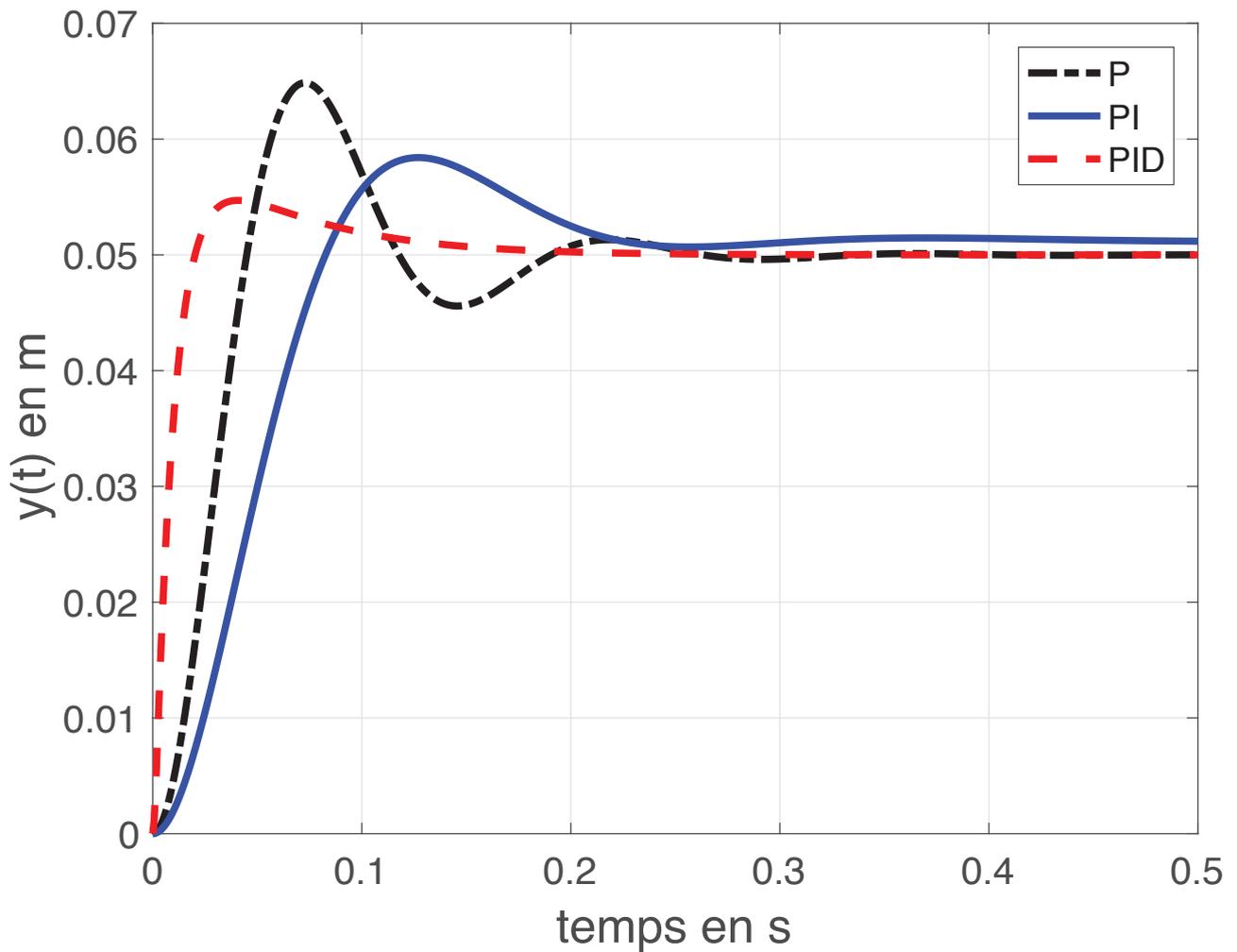


FIGURE 5 – Réponse à un échelon de position de 50mm avec trois correcteurs P(question 2) PI (question 5) et PID (déterminé numériquement)

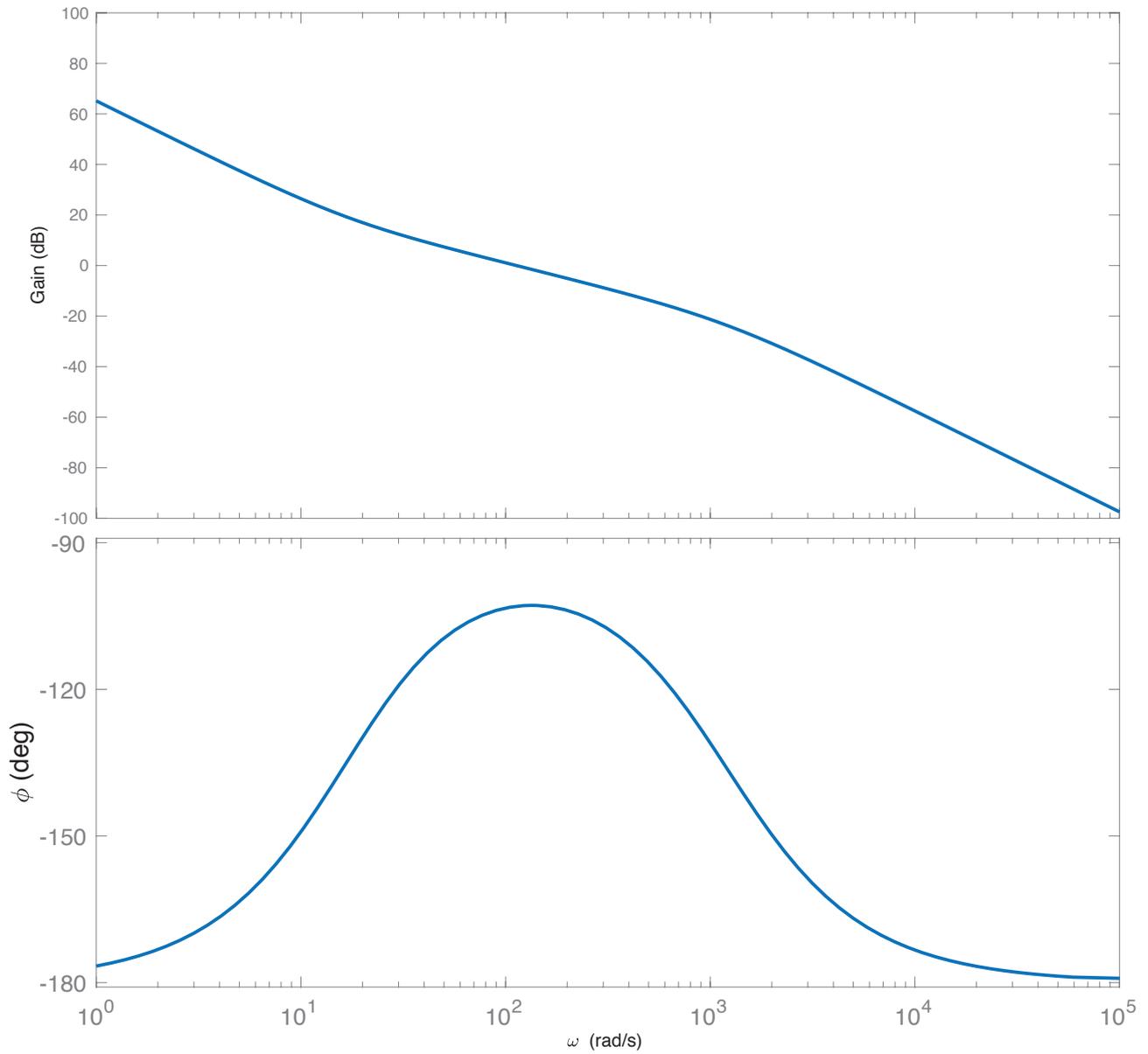


FIGURE 6 – Diagramme de Bode de  $H_{bo}(p)$  avec un correcteur PID pour  $K_p = 0,19$ ,  $K_i = 2,1$  et  $K_d = 0,0038$

# Exercice 2 : Misson insight

Source : CCINP MP 2019

## 1 Présentation générale

### a) Contexte

L'étude proposée porte sur la réplique terrestre<sup>a</sup> du système InSIGHT (**I**nterior exploration using **S**eismic Investigations, **G**eodesy and **H**eat Transport), projet du CNES (Centre National d'Études Spatiales) qui a pour but de déployer une station d'étude de la structure interne de la planète Mars.

L'atterrisseur InSIGHT (figure 7) emportera quatre sous-systèmes d'instrumentation à la surface de Mars afin d'analyser en détail pour la première fois les "statistiques vitales" de la planète :

- son pouls, activité interne, mesuré par l'instrument SEIS;
- sa température mesurée par l'instrument HP;
- ses réflexes mesurés par l'instrument RISE.

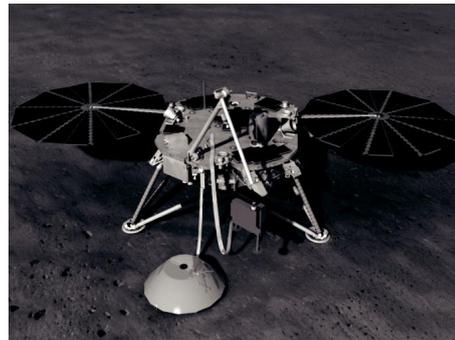


FIGURE 7 – Atterrisseur du projet InSIGHT

a. Utilisée sur Terre pour validation des différents sous-systèmes.

### b) Cahier des charges

La 9 le diagramme partiel des exigences concernant le système de déploiement DPL et le module SEIS.

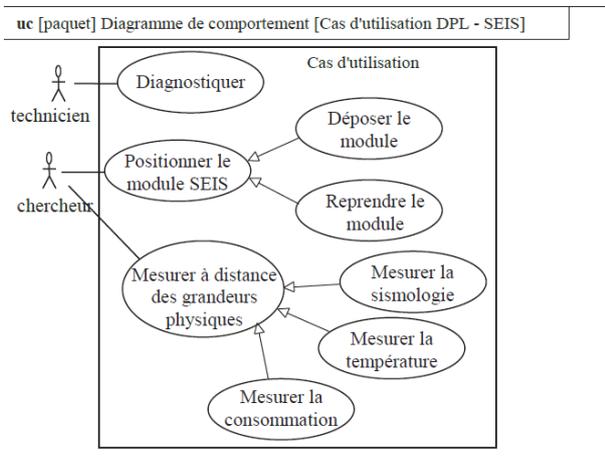


FIGURE 8 – Diagramme de cas d'utilisation

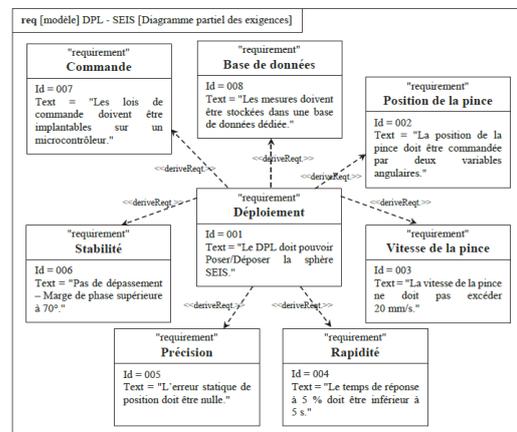


FIGURE 9 – Diagramme partiel des exigences

## 2 Validation du positionnement du module SEIS

**Objectif 1 :**  
 Valider les réglages de la commande des trois actionneurs linéaires associés aux pieds, afin de respecter les exigences liées à leur positionnement. On limitera l'étude à un des trois actionneurs. La chaîne structurelle de l'actionneur électrique utilisé dans le système est donnée ci-dessous.

Chaque actionneur électrique, appelé aussi vérin électrique, est asservi en position.

**Notations et spécifications**

- Masse à déplacer pour chaque vérin :  $M = 1 \text{ kg}$
- Pesanteur de la Terre :  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- Rapport de réduction du réducteur :  $r = 0,01$
- Rendement du réducteur :  $\eta_r = 0,95$
- Pas de la vis du système vis-écrou :  $p = 12 \text{ mm}$
- Rendement du système vis-écrou :  $\eta_v = 0,96$
- Coefficient de frottement visqueux du moteur :  $f = 0,002 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$
- Moment d'inertie équivalent total ramené sur l'arbre moteur :  $J = 0,00004 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- Résistance de l'induit de la MCC (Machine à Courant Continu) :  $R = 1\Omega$
- Inductance de l'induit de la MCC :  $L = 20\mu\text{H}$
- Constante de couple :  $K_c = 0,35 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$
- Constante de force contre électromotrice :  $K_e(t) = 0,35 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad}$
- Tension d'alimentation de l'induit de la MCC :  $u(t)$  [V]
- Courant absorbé par l'induit de la MCC :  $i(t)$  [A]
- Vitesse de rotation en sortie de la MCC :  $\omega(t)$  [rad/s]
- Position angulaire en sortie de la MCC :  $\theta(t)$  [rad]
- Force contre électromotrice de la MCC :  $e(t)$  [V]
- Couple moteur de la MCC :  $C_m(t)$  [N.m]
- Couple résistant total ramené sur l'arbre moteur :  $C_r(t)$  [N.m]

**Équations du moteur à courant continu**

- Equation électrique :  $u(t) = e(t) + R\cdot i(t) + L\cdot \frac{di(t)}{dt}$  (1)
- Équations de couplage électro-mécanique :  $e(t) = K_e\cdot\omega(t)$  (2)
- $C_m(t) = K_c\cdot i(t)$  (3)
- En isolant l'arbre moteur, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème du moment dynamique sur l'axe de rotation du moteur :  $J\frac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f\cdot\omega(t)$

**Transformée de Laplace**

On se place dans les conditions d'Heaviside pour l'ensemble de l'étude (conditions initiales nulles). La transformée de Laplace d'une fonction  $h(t)$  dans le domaine temporel sera notée en majuscule :  $L[h(t)] = H(p)$ .

**a) Modélisation de la motorisation**

**Q 8 :** À partir des équations du moteur à courant continu, proposer un schémas bloc modélisant la MCC.

On se place dans le cas particulier où  $C_r(p) = 0$

**Q 9 :** Donner l'expression, sous sa forme canonique, de la fonction de transfert en boucle fermée  $F_{m1}(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$

La figure 10 présente les résultats expérimentaux de l'évolution de la vitesse de rotation  $\omega(t)$  de la MCC à la suite de l'application d'un échelon de tension  $u(t)$  d'une amplitude de 12 V aux bornes de la MCC. On pose  $F_{m2}(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{F_0}{1+T_0p}$

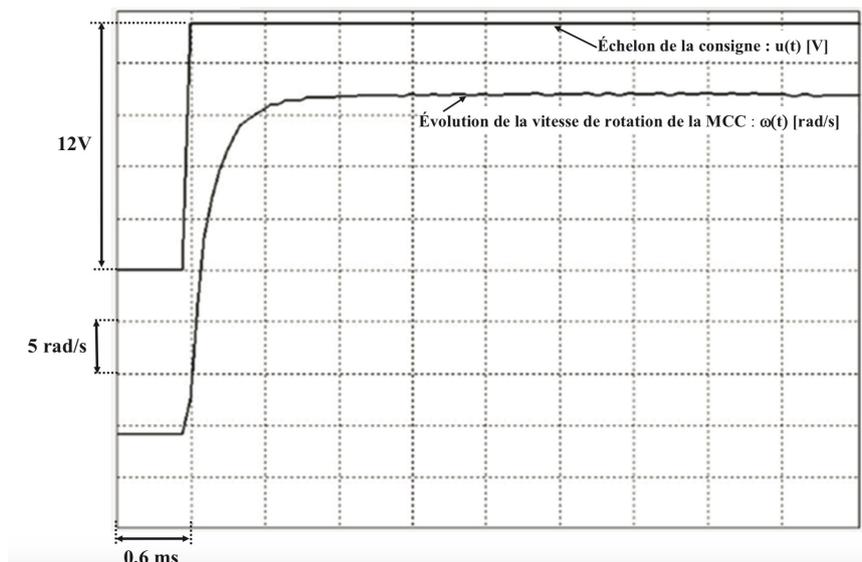


FIGURE 10 – résultats expérimentaux de l'évolution de la vitesse de rotation  $\omega(t)$  de la MCC à la suite de l'application d'un échelon de tension  $u(t)$  d'une amplitude de 12 V

**Q 10 :** Justifier le choix d'une fonction de transfert d'ordre 1 pour modéliser le comportement de la MCC à partir des essais expérimentaux (figure 10). Déterminer la valeur du gain statique  $F_0$  et de la constante de temps

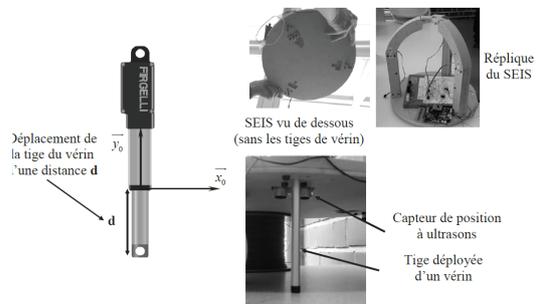
$T_0$  de  $F_{m2}(p)$ . Proposer une hypothèse simplificatrice permettant de justifier le passage à l'ordre 1 de  $F_{m2}(p)$  par rapport à  $F_{m1}(p)$ .

b) Étude de l'asservissement en position du vérin

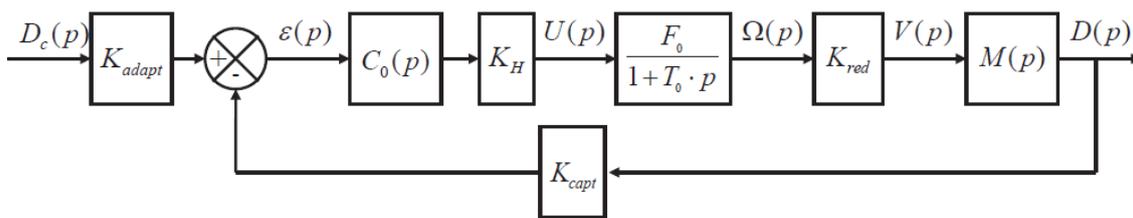


**Objectif 2 :**

Choisir un correcteur approprié permettant de satisfaire le cahier des charges vis-à-vis des exigences concernant l'asservissement en position du vérin électrique suivant l'axe  $\vec{y}_0$  conformément à la figure ci-contre. La mesure de la distance est obtenue grâce à un capteur à ultrason permettant de délivrer, sous la forme d'impulsions, une image de la distance entre la structure sur SEIS et le sol. Cette information est ensuite traitée afin de générer un signal image de la distance parcourue par la tige du vérin.



L'étude précédente a permis d'obtenir un modèle de comportement de la MCC intégré dans le schéma bloc de l'asservissement présenté sur la figure ci-dessous pour lequel  $C_r(p) = 0$ .



**Notations et spécifications**

- Gain du capteur :  $K_{capt} = 588 \text{ impulsions/m}$
- Gain de l'ensemble réducteur et vis-écrou :  $K_{red} = 19,1 \cdot 10^{-6} \text{ m/rad}$
- Vitesse linéaire de la tige du vérin :  $V(t) \text{ m.s}^{-1}$
- Déplacement linéaire de la tige du vérin :  $d(t) [m]$
- Correcteur :  $C_0(p)$
- Gain du hacheur :  $K_H = 1,163$
- Pour toute la suite du sujet, on considère :  $C_r(p) = 0$ .

Tout d'abord, le correcteur est considéré unitaire :  $C_0(p) = 1$ .

**Q 11 : Donner l'expression littérale de  $M(p)$  et  $K_{adapt}$ , pour garantir un bon asservissement.**

**Q 12 : Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G_{BO}(p)$  et mettre celle-ci sous forme canonique. Évaluer la classe de cette fonction de transfert.**

**Q 13 : Calculer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $D_c(p)$  et des constantes du problème. En déduire l'erreur statique et de traînage. Conclure sur la précision du système.**

On donne l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_{BO}(p) = \frac{0,0112}{p \cdot (0,00028 \cdot p + 1)}$$

**Q 14 : Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels de la fonction de transfert  $G_{BO}(p)$  sur le document réponse. En déduire la marge de phase de l'asservissement en effectuant toutes les constructions graphiques nécessaires. Conclure sur le respect de l'exigence 006 « Stabilité ».**

On désire quantifier la rapidité du système à la suite d'une sollicitation en échelon. On donne les relations permettant de calculer le temps de réponse à 5%, noté  $tr_{5\%}$ , pour un système d'ordre deux (avec  $\zeta$  le facteur d'amortissement et  $\omega_0$  la pulsation propre du système non amorti) avec la figure 12.

**Q 15 : Déterminer et calculer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert en boucle fermée  $G_{BF}(p) = \frac{D(p)}{D_c(p)}$ . En déduire le temps de réponse de l'asservissement en vitesse. Conclure sur le respect de l'exigence 004 « Rapidité ».**

Afin d'améliorer les performances de l'asservissement, on choisit un correcteur proportionnel de gain  $K_D$  tel que  $C_0(p) = K_D$ . La valeur numérique du gain sera déterminée à partir de deux méthodes :

- approche graphique, à partir de la marge de phase (maîtrise de la stabilité) ;
- approche analytique, à partir d'un comportement imposé.

**Q 16 : À partir de constructions graphiques sur le diagramme de Bode du document réponse, donner la valeur du gain du correcteur  $K_{D1}$ , permettant de garantir une marge de phase supérieure à  $70^\circ$ . La valeur de  $K_{D1}$  vous paraît-elle pertinente et réaliste ?**

On impose un temps de réponse à 5% de 5 s et un facteur d'amortissement  $\xi$  supérieur à 1.

On donne l'expression numérique de  $G_{BF}(p)$  avec un correcteur de gain  $K_D$  :

$$G_{BF}(p) = \frac{1}{\frac{0,025}{K_D} p^2 + \frac{89}{K_D} p + 1}$$

**Q 17 : À partir des équations 1 de la figure 12 liant le temps de réponse, le facteur d'amortissement et la pulsation propre ainsi que de l'expression numérique de  $G_{BF}(p)$ , donner une expression liant  $tr_{5\%}$  et  $K_{D2}$ . En déduire la valeur de  $K_{D2}$  permettant de respecter la contrainte imposée en termes de rapidité.**

On donne ci-dessous (figure 11) les tracés de la sortie du système asservi à la suite d'un échelon de consigne de 10 cm pour  $K_{D1} = 220000$  et  $K_{D2} = 53$ .

**Q 18 : Commenter les courbes (respect des exigences) et choisir le correcteur qui vous paraît le plus pertinent.**

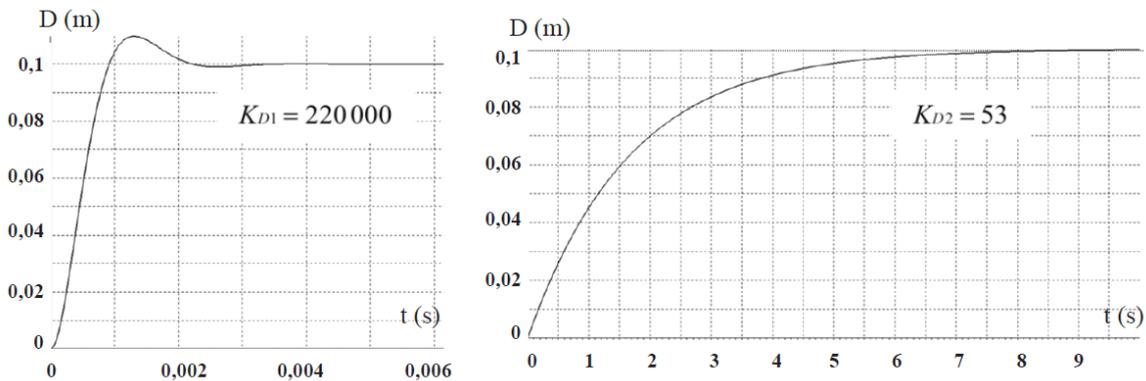


FIGURE 11 – Réponses indicielles du système asservi

### 3 Annexes

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad tr_{5\%} \approx \frac{3}{\xi \cdot \omega_0} \\ \xi > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad tr_{5\%} \approx \frac{6 \cdot \xi}{\omega_0} \end{array} \right. \quad (1)$$

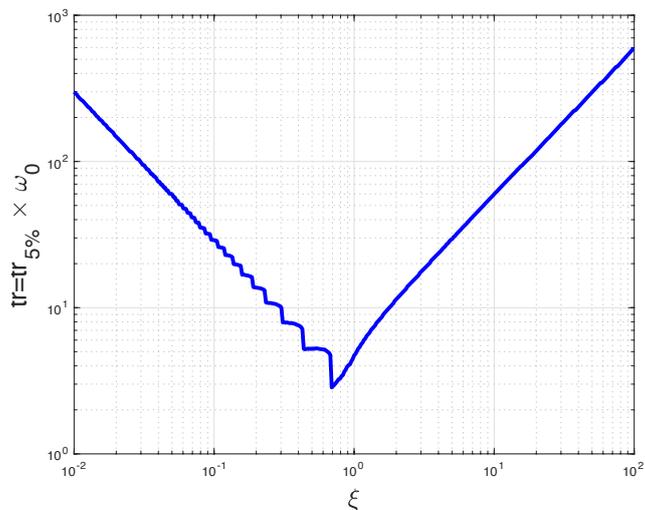


FIGURE 12 – Abaques pour un système linéaire d'ordre 2