

## Semaine n° 30 : du 19 mai au 23 mai

### Lundi 19 mai

- **Cours à préparer : Chapitre XXVIII - Séries**
  - *Partie 1* : Série convergente, série divergente ; somme d'une série convergente ; somme partielle d'indice  $n$ , reste d'indice  $n$  ; séries géométriques, condition nécessaire et suffisante pour la convergence, somme d'une série géométrique convergente ; séries télescopique ; divergence grossière ; série exponentielle.
  - *Partie 2* : Séries à termes positifs ; comparaison de séries à termes positifs ; séries de Riemann.
- **Exercices à rendre en fin de TD - (liste non exhaustive)**
  - **Feuille d'exercices n° 27** : exercices 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 5.

### Mardi 20 mai

- **Cours à préparer : Chapitre XXVIII - Séries**
  - *Partie 2* : Séries à termes positifs ; comparaison de séries à termes positifs ; séries de Riemann.
  - *Partie 3* : Comparaison série-intégrale.
  - *Partie 4* : Séries absolument convergentes ; critère spécial des séries alternées.
- **Exercices à corriger en classe**
  - **Feuille d'exercices n° 27** : exercice 8.

### Jeudi 22 mai

- **Cours à préparer : Chapitre XXVIII - Séries**
  - *Partie 5.1* : Famille sommable de réels positifs ; invariance de la somme par permutation ; opérations ; comparaison ; une sous-famille d'une famille sommable de réels positifs est sommable ; sommation par paquets ; théorème de Fubini positif.
  - *Partie 5.2* : Famille sommable de nombres réels ou complexes ; somme d'une famille sommable, invariance par permutation ; linéarité de la somme ; sommation par paquets ; théorème de Fubini ; produit de Cauchy.
- **Exercices à corriger en classe**
  - **Feuille d'exercices n° 27** : exercice 17.

### Vendredi 23 mai

- **Cours à préparer : Chapitre XXIX - Espaces euclidiens et préhilbertiens réels**
  - *Partie 1* : Produit scalaire ; espace préhilbertien réel, espace euclidien ; distance ; norme ; distance associée à une norme, norme associée à un produit scalaire ; inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; identité du parallélogramme, identité de polarisation.
  - *Partie 2.1* : Vecteur unitaire, vecteurs orthogonaux.
  - *De la définition 2.2.1 au corollaire 2.2.7* : Famille orthogonale, famille orthonormale ; théorème de Pythagore ; toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

# Échauffements

## Mardi 20 mai

- Soient  $a, b, a_1, \dots, a_n, x \in \mathbb{K}$ . Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

- *Cocher toutes les phrases correctes :*
  - Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier.
  - Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers et positifs est un entier positif.
  - Une matrice à coefficients entiers admet un inverse à coefficients entiers si et seulement si son déterminant est 1 ou  $-1$ .
  - Le pgcd des coefficients de la première ligne d'une matrice à coefficients entiers qui admet un inverse à coefficients entiers vaut 1.

## Jeuudi 22 mai

- Calculer les déterminants des endomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définis par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = M^\top \text{ et } \psi(M) = 3M - 2M^\top.$$

- *Cocher toutes les phrases correctes :*
  - $\det \left( a_i^{j-i} \right)_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ .
  - $\det \left( (-1)^{i+j} a_{ij} \right) = \det a_{ij}$ .
  - Pour  $\sigma \in S_n$ ,  $\det \left( \delta_{i, \sigma(j)} \right) = \varepsilon(\sigma)$ .

## Vendredi 23 mai

- *Cocher toutes les phrases correctes :*
  - Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\det(A^\top \cdot A) \geq 0$ .
  - Il existe  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $\det(A^2) = -1$ .
  - Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la fonction  $t \mapsto \det(tA + I)$  est polynomiale de degré  $n$ .
  - Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe au plus  $n$  scalaires  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $A - \lambda I$  soit non inversible.
- *Cocher toutes les phrases correctes :*

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  où  $n \geq 42$ . Alors d'après l'inégalité de Taylor,

- $\left| 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} \frac{(-1)^2}{t^3} - \dots - \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n!} \sup_{t \in ]0,1]} \left| \frac{(-1)^n}{n! t^{n+1}} \right|$
- Soit  $(x, x_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} + (x - x_0) \frac{1}{(x_0)^2} \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{2} \sup_{t \in ]x, x_0]} \left| \frac{1}{t^2} \right|$
- Soit  $(x, x_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} + (x - x_0) \frac{1}{(x_0)^2} \right| \leq |x - x_0| \sup_{t \in ]x, x_0]} \left| \frac{1}{t^2} \right|$
- Soit  $(x, x_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} + (x - x_0) \frac{1}{(x_0)^2} \right| \leq |x - x_0| \sup_{t \in ]x, x_0]} \left| \frac{2}{t^3} \right|$