Semaine n° 25 : du 31 mars au 4 avril

Lundi 31 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini**

  Les définitions des parties 1.1 et 1.2 sont à connaître parfaitement.

  — *Partie 1.1 :* Expérience aléatoire, univers, événement ; événement impossible, événement certain ; événements incompatibles ; événements deux à deux incompatibles, mutuellement incompatibles.
  Variable aléatoire, univers image ; pour une variable aléatoire X, événement $(X \in A)$; si X est réelle, événements $(X = x)$, $(X \leqslant x)$, etc.
  Système complet d'événements ; système complet d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$

  — *Partie 1.2 :* Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini ; événement presque sûr, événement négligeable ; probabilité uniforme ; propriétés d'une probabilité ; formule des probabilités totales ; détermination par les images des événements élémentaires.

  — *Partie 1.3 :* Probabilité conditionnelle ; si B est un événement de probabilité non nulle, P_B est une probabilité ; formule des probabilités composées, formule des probabilités totales ; formules de Bayes.
- **Exercices à rendre en fin de TD** - *(liste non exhaustive)*

  — **Feuille d'exercices n° 24 :** exercices 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11.

Mardi 1er avril

- **Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini**

  — *Partie 1.4 :* Couple d'événements indépendants ; famille finie d'événements mutuellement indépendants.
- **Exercices à corriger en classe**

  — **Feuille d'exercices n° 24 :** exercices 6, 9.

Jeudi 3 avril

- **Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini**

  — *Partie 2.2 :* Loi d'une variable aléatoire ; image d'une variable aléatoire X par une application f, loi de $f(X)$; loi conditionnelle.

  — *Partie 2.4 :* Loi uniforme ; loi de Bernoulli ; loi binomiale.
- **Exercices à corriger en classe**

  — **Feuille d'exercices n° 24 :** exercices 13, 14, 22.

Vendredi 4 avril

- **Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini**

  — *Partie 2.5 :* Couple de variables aléatoires ; loi conjointe, lois marginales.
- **Exercices à corriger en classe**

  — **Feuille d'exercices n° 24 :** exercices 19, 21.

Échauffements

Mardi 1^{er} avril

- *Cocher toutes les assertions vraies :*
  - ☐ Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement s'il existe un réel a tel que $f(x) = ax$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  - ☐ Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a et b tels que $f(x,y) = (ax, by)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  - ☐ Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a, b, c et d tels que $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  - ☐ Une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a, b et c tels que $f(x,y,z) = (ax, by, cz)$, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F. On pose $\dim E = n$ et $\dim F = m$.
  - ☐ Si f est injective, alors $n \leq m$.
  - ☐ Si $n \leq m$, alors f est injective.
  - ☐ Si f est surjective, alors $n \geq m$.
  - ☐ Si $n \geq m$, alors f est surjective.

Jeudi 3 avril

- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\forall (x,y,z) \in E, f(x,y,z) = (x+3z, 0, y-2z)$$

  - ☐ $f(e_1) = e_1 + 3e_3, f(e_2) = 0, f(e_3) = e_2 - 2e_3$.
  - ☐ $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_3, f(e_3) = 3e_1 - 2e_3$.
  - ☐ f est de rang 3 car E est de dimension 3 .
  - ☐ f est de rang 2 car (e_1, e_3) est une base de $\operatorname{Im} f$.
  - ☐ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
  - ☐ $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 car $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f$.
  - ☐ $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Im} f$ car $\dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim \operatorname{Im} f$.
  - ☐ L'égalité « $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ » suffit pour affirmer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.
  - ☐ f est surjective.
  - ☐ f est injective.
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme involutif de E, c.à.d. un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = Id$, où Id est l'identité de E.
  - ☐ f est bijective.
  - ☐ $\operatorname{Im}(Id+f) \cap \operatorname{Im}(Id-f) = E$.
  - ☐ $E = \operatorname{Im}(Id+f) + \operatorname{Im}(Id-f)$.
  - ☐ $\operatorname{Im}(Id+f)$ et $\operatorname{Im}(Id-f)$ ne sont pas supplémentaires dans E.

Vendredi 4 avril

- Soit $u : x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x+\cos x)$ et $f : x \mapsto (x+\cos x)^{1/x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
  - ☐ Pour obtenir un $DL_2(0)$ de f, il suffit de prendre un $DL_2(0)$ de $\ln(x+\cos x)$.
  - ☐ $f(x) = e^{u(x)}$ donc, si $u(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0, alors :

$$f(x) = 1 + p(x) + \frac{p(x)^2}{2!} + o\left(x^2\right) \text{ où } p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

  - ☐ Le $DL_2(0)$ de f est : $f(x) = e\left[1 - x - \frac{4}{3}x^2\right] + o\left(x^2\right)$.
  - ☐ Du $DL_2(0)$ de f, on déduit un prolongement par continuité de f en 0 en une fonction dérivable en 0, et un positionnement de $\mathscr{C}$ au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.