Matrices et algèbre linéaire

(♡) Exercices d'application directe

Exercice 1 Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

$$u_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y, 3y) \end{array},$$

$$u_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array},$$

$$u_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)dt \end{array},$$

$$u_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \to & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}.$$

Exercice 2 On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

1) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

3) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

4) Soit u l'endomorphisme de dérivation. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ puis la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 Calculer le rang des matrices suivantes.

$$\diamondsuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \heartsuit = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \spadesuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \clubsuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(✎) Un exercice corrigé

Exercice 4 E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. f est l'endomorphisme de E ayant, dans cette basse, pour matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

On considère les trois vecteurs suivants : $u_1 = e_2, u_2 = e_1 - e_3, u_3 = 2e_1 - e_2 - e_3$

1) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E

2) Ecrire la matrice de f dans cette nouvelle base.

3) En déduire que $f^3 + f^2 - 5f + 3Id_E = 0$

4) En déduire que f est bijective ; donner la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$