Matrices et algèbre linéaire

(♡) Exercices d'application directe

Exercice 1

1) Soit M_1 la matrice de u_1 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
$u_1(1,0) = (2,1,0)$ et $u_1(0,1) = (-1,1,3)$, donc

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Soit M_2 la matrice de u_2 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $u_2(X^k) = 1$, donc

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$$

3) Soit M_3 la matrice de u_3 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $u_3(X^k) = \frac{1}{k+1}$, donc

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{j} & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$$

4) Soit M_4 la matrice de u_4 dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
$u_4(1) = 1 - 1 = 0$, $u_4(X) = (X+1) - X = 1$, $u_4(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$ et $u_4(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$, donc

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1) $X(X-1) = X^2 - X$ et $X(X-1)(X-2) = X^2 - 3X^2 + 2X$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
qui est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, donc inversible.
Par conséquent, $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

2) La matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$\boxed{P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3) *Première méthode :* On exprime les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$:
$1 = 1$, $X = X$, $X^2 = X(X-1) + X$
et $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X^2 - 2X = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$.
Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Deuxième méthode : On utilise la méthode du pivot pour calculer P^{-1}.

4) $u(1) = 0$, $u(X) = 1$, $u(X^2) = 2X$ et $u(X^3) = 3X^2$, donc la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

D'après la formule de changement de base, la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$ vérifie $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, donc

$$\boxed{A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Exercice 3 On trouve respectivement : 4, 4, 5 et 4.

(✎) Un exercice corrigé

Exercice 4 **Attention :** dans cet exercice, on ne travaille a priori pas dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs ne sont pas des triplets de réels.

1) *Première méthode :* Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
Soient $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma u_3 = 0_E$.
Alors $(\mu + 2\gamma)e_1 + (\lambda - \gamma)e_2 + (-\mu - \gamma)e_3 = 0_E$, or (e_1, e_2, e_3) est libre, donc $\begin{cases} \mu + 2\gamma = 0 \\ \lambda - \gamma = 0 \\ -\mu - \gamma = 0 \end{cases}$
d'où $\begin{cases} \mu + 2\gamma = 0 \\ \lambda - \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ puis $\lambda = \mu = \gamma = 0$.
Par conséquent, la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de 3 vecteurs de E, or $\dim(E) = 3$, donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } E}$.

Deuxième méthode :

$\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3)=\mathrm{rg}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$, or

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}\qquad {\scriptstyle L_2\leftrightarrow L_1}$$
$$=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad {\scriptstyle L_3\leftarrow L3+L2}$$

qui est de rang 3, donc $\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3)=3$.
Par conséquent, la famille (u_1,u_2,u_3) est une famille libre de 3 vecteurs de E, or $\dim(E)=3$, donc $\boxed{(u_1,u_2,u_3) \text{ est une base de } E}$.

Troisième méthode : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$.
On montre en utilisant la méthode du pivot que cette matrice est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$.
Donc $\boxed{(u_1,u_2,u_3) \text{ est une base de } E}$

2) Notons $\mathcal{B}'=(u_1,u_2,u_3)$. Soit N la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Première méthode : Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors $P=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$, et $N=P^{-1}MP$.
On calcule P^{-1} (si cela n'a pas été fait dans la question 1), soit par la méthode du pivot, soit en exprimant e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}'$ (car P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

On obtient ensuite : $\boxed{N=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}}$

Deuxième méthode : On exprime $f(u_1)$, $f(u_2)$ $f(u_3)$ dans la base u_1, u_2, u_3 ; *plusieurs méthodes de calculs sont possibles.*

— $f(u_1)=f(e_2)=e_2=u_1$.
— $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_2))=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2)=M\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$
  donc $f(u_2)=e_1+e_2-e_3=u_1+u_2$.
— $f(u_3)=2f(e_1)-f(e_2)-f(e_3)$
  $f(u_3)=2(-7e_1+3e_2+4e_3)-e_2-(-8e_1+2e_2+5e_3)$
  $f(u_3)=-6e_1+3e_2+3e_3=3u_3$

Donc $\boxed{N=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}}$

3) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^3+f^2-5f+3\mathrm{I}_E) = N^3+N^2-5N+3I_3$, or $N^2 = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&9\end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&-27\end{pmatrix}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} &N^3+N^2-5N+3I_3\\ &= \begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&-27\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5&5&0\\0&5&0\\0&0&-15\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{f^3+f^2-5f+3\mathrm{I}_E = 0}$.

4) On en déduit $\frac{-1}{3}(f^2+f-5\mathrm{I}_E)\circ f = \mathrm{I}_E$; posons $g = \frac{-1}{3}(f^2+f-5\mathrm{I}_E)$, alors $g\circ f = \mathrm{I}_E$, et, comme f est linéaire, $f\circ g = \frac{-1}{3}(f^3+f^2-5f) = \mathrm{I}_E$.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} = \frac{-1}{3}(f^2+f-5\mathrm{I}_E)}$.

Plusieurs méthodes sont possibles pour donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Première méthode : On sait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{-1}$, on inverse la matrice M.

Deuxième méthode :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\frac{-1}{3}\left(f^2+f-5\mathrm{I}_E\right)\right) = \frac{1}{3}\left(M^2+M-5I_3\right)$$

Troisième méthode (qui n'est intéressante que si on a déjà calculé P^{-1}) : la matrice N^{-1} de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\frac{-1}{3}\left(N^2+N-5I_3\right) = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&-1/3\end{pmatrix}$$

Or d'après la formule de changement de base, la matrice M^{-1} de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ vérifie

$$\boxed{M^{-1} = PN^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{-5}{3}&0&\frac{-8}{3}\\ \frac{7}{3}&1&\frac{10}{3}\\ \frac{4}{3}&0&\frac{7}{3}\end{pmatrix}}$$