Applications linéaires

Exercice 1 Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) On suppose que :
$$\forall g \in \mathcal{L}(F,E), f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0.$$
Montrer que f est bijective.

2) Calculer, en fonction de $p = \dim E$, $n = \dim F$ et $r = \operatorname{rg} f$ la dimension de :
$$H = \{g \in \mathcal{L}(F,E),\ f \circ g \circ f = 0\}.$$

Exercice 2 Soit E et F deux espaces-vectoriels de dimensions finies. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ vérifiant $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1) Montrer que $E = \operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} u$.

2) Montrer que $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v = \operatorname{rg} v \circ u = \operatorname{rg} u \circ v$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n non nulle.
L'ensemble $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires de E est un $\mathbb{K}$-ev appelé le *dual* de E et noté E^*.
Le dual de E^* est appelé le *bidual* de E et noté E^{**}. On a ainsi $(E^*)^* = E^{**}$.

Partie I — Base duale —

Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note e_i^* l'unique forme linéaire de E définie par la relation :
$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

On rappelle que δ est appelé *symbole de Kronecker*.

La famille $(e_k^*)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est alors notée $\mathscr{B}^*$.

1) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, e_k^* est appelée l'*application coordonnée d'indice* k de $\mathscr{B}$. Justifier cette appellation en montrant que pour tout $x \in E$ on a $x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$.

2) **a)** Montrer que $\mathscr{B}^*$ est une famille libre de E^*.

b) Montrer que pour toute $f \in E^*$, $f = \sum_{k=1}^{n} f(e_k)e_k^*$.

c) En déduire que $\mathscr{B}^*$ est une base de E^*, appelée la *base duale de* $\mathscr{B}$.

Partie II — Bidual et base antéduale —

3) Pour tout $x \in E$ on note ev_x l'application $\begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$, appelée *évaluation de f en x.*

a) Soit $x \in E$. Montrer que ev_x appartient à E^{**}.

b) Montrer que l'application $\mathrm{ev} : \begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & \mathrm{ev}_x \end{array}$ est un isomorphisme de E sur E^{**}.

c) Quelle est l'application e_i^{**} ?

4) Soit $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une et une seule base $\mathscr{G} = (g_1, \ldots, g_n)$ de E telle que $\mathscr{G}^* = \mathscr{F}$. Cette base est appelée *base antéduale de* $\mathscr{F}$.