Devoir surveillé n°8

Barème

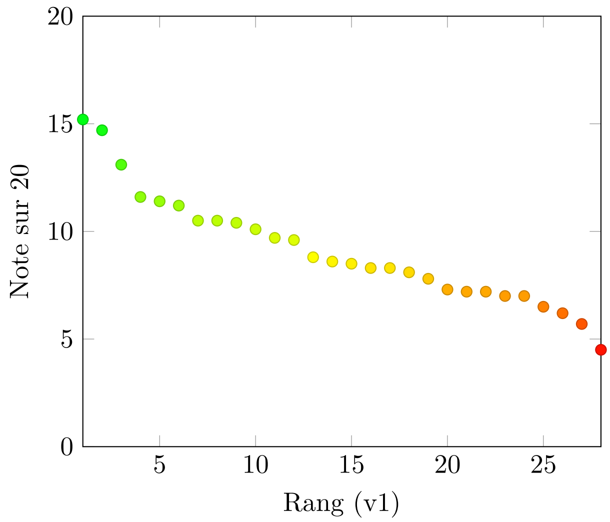
Calculs : 20 questions sur 2 points, total sur 40 , ramené sur 5 points
Problème : 35 ou 30 questions sur 4 points, total sur 140 (v1) ou 120 (v2), ramené sur 15 points

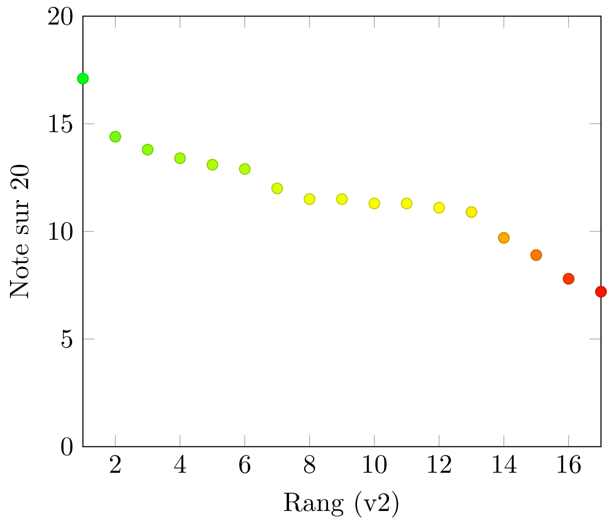
Soit c le nombre de points obtenus sur la fiche de calculs et p le nombre de points obtenus sur les exercices, la note sur 20 est le réel $n = \min\left\{\varphi\left(\frac{5c}{30} + \frac{15p}{\alpha}\right), 20\right\}$ avec $\alpha = 95$ (v1) ou 68 (v2), et φ une fonction continue strictement croissante telle que $\varphi \geq \mathrm{Id}$ et $\varphi([0,20]) = [0,20]$, choisie par mes soins.

Statistiques

	Calculs	Problème (v1)	Problème (v2)	*Précision (v1)*	*Précision (v2)*
Minimum	5	22	20	*45%*	*35%*
Q1	10	39	28	*51%*	*43%*
Médiane	13	41	33	*54%*	*53%*
Q3	20	52	40	*59%*	*55%*
Maximum	30	75	55	*74%*	*80%*
Moyenne	15.1	44.8	34.2	*55.7%*	*51.9%*

Répartition des notes





Remarques générales

— Une réponse non justifiée est sans valeur. Si vous comptez ne pas justifier une réponse, n'écrivez rien : cela vous fera gagner du temps.
— En analyse, il faut mener des calculs justes et les terminer. Un résultat non simplifié est considéré comme faux.
— Les erreurs du type « ~~f(x)~~ est croissante/continue/dérivable » ont été pénalisées. Idem pour les variables non définies lorsque l'erreur était récurrente. Je n'exclus pas de pénaliser systématiquement dans le prochain devoir toutes les erreurs présentées dans le petit guide de rédaction qui vous a été distribué en septembre : vous avez largement eu le temps de le lire et relire, et devez être en mesure de l'appliquer.
— La présentation des copies est dans l'ensemble à peu près correcte, mais certains se permettent encore d'utiliser des abréviations. Rappelons donc qu'on écrit « tel que » et pas « ~~tq~~ », « coefficients » et pas « ~~coeff~~ », etc.
— Vous ne pouvez pas écrire un $'$ pour dériver une *expression*. Par exemple, $\left(\frac{P_n(t)\mathrm{e}^t}{(1+t^2)^{n+1}}\right)'$ n'est pas correct (un correcteur de mauvaise foi pourrait croire que vous dérivez pas rapport à n, il y aura ambiguité lorsque vous manipulerez des fonctions dépendant d'un paramètre réel). Écrivez plutôt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P_n(t)\mathrm{e}^t}{(1+t^2)^{n+1}}\right)$. Le symbole $'$ est réservé à la dérivée de *fonction* ; par exemple, on peut écrire $\left(f^{(n)}\right)'(t)$.
— Lorsqu'on fait une intégration par parties, on l'indique, et on vérifie les hypothèses de la formule...

Version 1

Exercice 1

— **Question 1.** Il fallait donner ici une fonction non nulle de E appartenant à F : si vous donnez une fonction alambiquée qui est nulle sur $[0, 1]$, ou une fonction nulle sur $[0, 1]$ et non nulle ailleurs, vous êtes hors sujet.
— **Question 5a.** Il s'agit ici de la base intervenant dans l'interpolation de Lagrange ! Cette question est en fait une question de cours, qui aurait due être bien plus souvent réussie...
— **Question 5b.** Affirmer que $\mathrm{rg}(g_1, ..., g_p) = p$ sans le justifier n'a aucun intérêt : pas de preuve, pas de points.
— **Question 5c.** Cette question précède la question 5d. Elle consiste à définir une fonction en retranchant à f un certain élément de G. Or pour la question 5d, il serait bien pratique de pouvoir écrire f comme somme d'un élément de F et d'une élément de G. Une lecture attentive de l'énoncé suffit donc à deviner la réponse attendue, et pouvait permettre de détecter une erreur antérieure.

Exercice 2

— **Question 1.** Pas de croissances comparées ici. Les croissances comparées s'appliquent à des formes indéterminées.
— **Question 4.** Cette fois-ci, c'était un résultat de croissances comparées. Il faut donc le dire ! L'équivalent donné par la question précédente est bien trop rarement utilisé : pensez aux équivalents pour simplifier les calculs de limites !
— **Question 6.** Le principe d'une identité remarquable, c'est qu'on doit la remarquer. Calculer un discriminant pour déterminer le signe de $t^2 - 2t + 1$ n'est franchement pas pertinent.
— **Question 7.** Si vous aviez commis une erreur dans cette question, vous ne pouviez alors plus répondre aux quelques questions suivantes. Il s'agissait d'un simple calcul de dérivée... Prenez votre temps et vérifiez vos calculs ! Pour dériver $\dfrac{f}{g^2}$, le plus efficace est souvent de dériver le produit fg^{-2} en $f'g^{-2} - 2fg'g^{-3}$.

Donnez un résultat simplifié, *i.e.* soit factorisé au maximum, soit avec les polynômes écrits sous forme développée-réduite. Le correcteur ne doit pas avoir à faire un effort pour vérifier votre résultat.

En lisant l'énoncé, vous savez que vous pouvez factoriser le numérateur pour obtenir un dénominateur égal à $(1 + t^2)^3$. Écrire une fraction sur $(1 + t^2)^4$ sera donc pénalisé.
— **Question 8.** Il convenait de montrer que $f'' = 0$ a deux solutions réelles **exactement**. Sinon, nommer α la solution non évidente (sans démontrer son existence et son unicité) n'a pas de sens.

Avec $g : t \mapsto t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 4t - 1$, le signe de g' n'était pas évident.

Bien entendu, vous saviez que g admettait une racine évidente. L'énoncé vous le disait. Dès lors, pourquoi ne pas factoriser g ? Cela simplifie toute l'étude, qui n'utilise que des outils de début d'année.
— **Question 10.** Utiliser la formule de Taylor-Young n'est pas adapté ici : il suffit de faire le produit de deux développements limités simples. On attendait l'équation de la tangente (et ce n'est pas une asymptote !), et la position relative du graphe et de sa tangente.
— **Question 11.** Le graphe doit faire apparaître tous les résultats précédents : asymptotes, tangentes, positions relatives. L'énoncé demandait d'identifier la présence d'un point d'inflexion en 1.

Le fait que la dérivée seconde s'annule en un point ne suffit pas à justifier la présence d'un point d'inflexion : par exemple, la dérivée seconde de $x \mapsto x^{42}$ est nulle en 0, mais la courbe représentative de cette fonction ne possède pas de point d'inflexion en 0.
— **Question 12.** Les polynômes P_n sont des polynômes. Ils s'expriment donc en fonction de l'indéterminée X et pas d'un petit t dont on ignore généralement tout (car non défini).
— **Question 13.** Là encore, il était essentiel de mener correctement le calcul.

À la fin de cette question, il paraît pertinent de vérifier la cohérence de vos réponses aux questions 5, 7 et 13. Il suffit pour cela de calculer P_1 puis P_2 avec la relation de récurrence trouvée, et de vérifier le tableau de la question 12.
— **Question 14.** Vous devez justifier que la dérivée d'un polynôme à coefficients entiers et que la somme et le produit de deux polynômes à coefficients entiers sont à coefficients entiers, ne serait-ce qu'en indiquant que cela découle directement des formules de dérivation, somme et produit.
— **Question 15.** Se contenter d'écrire que le degré de P_n est $2n$ n'a aucun intérêt : pas de preuve, pas de points.
— **Question 17.** F est dérivable avec $F' = f$, donc tout ce qui compte est le signe de f. La croissance de f n'a absolument aucun intérêt.
— **Question 19.** Le fait que $f > 0$ n'implique pas que pour tout $x \in \cancel{\mathbb{R}}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$: attention à l'ordre des bornes dans les propriétés de positivité et croissance de l'intégrale.

Version 2

Exercice 1

— **Question 1.** Faites les décompositions en éléments simples sur les **fractions rationnelles**. Si vous écrivez « il existe des réels a, b, c tels que pour ~~tout~~ réel t, $\dfrac{t}{(t+1)(t+2)^2} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{t+2} + \dfrac{c}{(t+2)^2}$ », c'est **faux** : ces expressions ne sont pas définies en -1 et -2. Et si vous multipliez ensuite par $t+1$ pour évaluer en -1, vous êtes en train d'évaluer en une valeur interdite.

À retenir : on décompose en éléments simples la fraction rationnelle (avec X), puis on l'utilise pour intégrer la fonction rationnelle associée.

Pour tous ceux qui préfèrent bricoler pour aboutir à la réponse donnée dans l'énoncé, il vaudrait mieux justifier que $x \mapsto T(f_1)(x) - \ln \dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{2}{x+2} - \ln 2 + 1$ est dérivable, de dérivée nulle, et est nulle en 0...

— **Question 4a.** La linéarité ne suffit pas, il faut aussi montrer que $\forall f \in E,\ T(f) \in E$!

Pour cela, on utilise le théorème fondamental de l'analyse afin de justifier la dérivabilité de $T(f)$, et donc sa continuité, en n'oubliant pas de vérifier **explicitement** les hypothèses du fameux théorème (c'est-à-dire en indiquant clairement que f est continue), et en citant **précisément** sa conclusion (qui n'est pas « la fonction est continue/dérivable/de classe $\mathcal{C}^1$ »).

— **Question 4b.** $\mathbb{R}_+$ n'est pas un segment, vous ne pouvez pas affirmer que « f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ ~~car~~ f est continue ».
Par ailleurs, toute fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ est bornée sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ (puisqu'elle y est continue) mais n'est pas pour autant bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Affirmer que la fonction est bornée sur $\mathbb{R}_+$ car elle l'est sur deux intervalles dont la réunion est $\mathbb{R}_+$ n'est pas suffisant, car ne repose sur aucun théorème du cours. Une fonction peut d'ailleurs être bornée sur tous les intervalles d'une famille (par exemple, exp est bornée sur tout segment $[-n, n]$ où $n \in \mathbb{N}$) mais pas sur leur réunion (exp n'est pas bornée sur $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n]$, qui n'est autre que $\mathbb{R}$).

— **Question 5c.** Il convient d'appliquer l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale (ou l'inégalité de la moyenne). On vérifie donc explicitement l'ordre les bornes des deux intégrales.
Attention à la gestion des inégalités, écrire $|T(f)(x)| \leq \left| M \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \right|$ est une erreur grave, qui montre que vous n'avez pas bien compris comment manipuler les inégalités.

Exercice 2

— **Question 1b.** Le fait que $g \circ f = g' \circ f$ (ou que $f \circ g = f \circ g'$) ne permet pas d'affirmer que $g = g'$: f n'est a priori pas inversible (et l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ n'est pas intègre).

— **Question 5.** Il fallait démontrer que si f et g commutent, alors toutes leurs puissances commutent aussi.

— **Question 7a.** Vous êtes généralement passés à côté du fait que y devait appartenir à $\mathrm{Im}(f)$: lisez attentivement l'énoncé.

— **Question 8.** J'ai attribué l'intégralité des points à cette question uniquement lorsque vous aviez répondu de manière suffisamment satisfaisante aux questions précédentes.

Répartition des points

Version 1

	Question	Non traité	Non encadré	0	1	2	3	4
ex1	1	11	0	8	1	1	0	7
	2	3	0	0	2	1	6	16
	3	3	0	3	0	1	1	20
	4	3	0	3	0	3	4	15
	5a	7	0	5	4	1	2	9
	5b	16	0	9	1	1	0	1
	5c	19	0	5	0	0	0	4
	5d	23	0	4	0	1	0	0
ex2	1	0	0	0	0	3	10	15
	2	1	0	1	1	0	6	19
	3	0	0	1	2	6	5	14
	4	0	1	3	1	0	6	17
	5	0	0	2	0	1	2	23
	6	0	0	3	3	2	9	11
	7	0	0	12	4	1	2	9
	8	4	0	9	14	1	0	0
	9	22	0	3	2	0	1	0
	10	5	0	4	5	7	5	2
	11	12	0	3	9	4	0	0
	12	3	0	0	3	13	1	8
	13	5	0	10	2	1	6	4
	14	19	0	0	2	5	2	0
	15	20	0	6	1	1	0	0
	16	28	0	0	0	0	0	0
	17	6	0	9	2	1	5	5
	18	15	0	13	0	0	0	0
	19	23	0	4	1	0	0	0
	20	16	0	3	1	1	0	7
	21	16	0	2	4	3	1	2
	22	22	0	3	2	0	1	0
	23	24	0	1	1	1	0	1
	24	19	0	7	0	2	0	0
	25	25	0	3	0	0	0	0
	26	28	0	0	0	0	0	0
	27	28	0	0	0	0	0	0

Version 2

	Question	Non traité	Non encadré	0	1	2	3	4
ex1	1a	0	0	1	1	0	7	8
	1b	3	0	3	6	1	1	3
	2a	1	0	3	3	4	4	2
	2b	8	0	5	1	0	2	1
	2c	13	0	0	4	0	0	0
	3a	6	0	7	0	0	0	4
	3b	13	0	1	0	2	1	0
	4a	2	0	1	1	3	8	2
	4b	3	0	0	2	0	6	6
	4c	4	0	2	3	0	3	5
	4d	9	0	7	0	1	0	0
	5a	3	0	5	1	2	5	1
	5b	10	0	6	1	0	0	0
	5c	7	0	2	3	2	3	0
	5d	9	0	5	1	2	0	0
	6	13	0	3	0	1	0	0
	7	14	0	2	1	0	0	0
	8a	14	0	2	1	0	0	0
	8b	13	0	0	1	2	1	0
	8c	17	0	0	0	0	0	0
ex2	1a	3	0	2	0	0	1	11
	1b	3	0	4	0	1	0	9
	2	0	0	1	0	1	1	14
	3	0	0	1	0	6	1	9
	4	2	0	0	4	2	8	1
	5	7	0	4	0	5	0	1
	6a	6	0	8	1	2	0	0
	6b	15	0	2	0	0	0	0
	6c	15	0	1	1	0	0	0
	7	13	0	0	0	4	0	0