

Devoir surveillé n°5

Barème

Calculs : 15 questions sur 2 points, total sur 30 , ramené sur 5 points

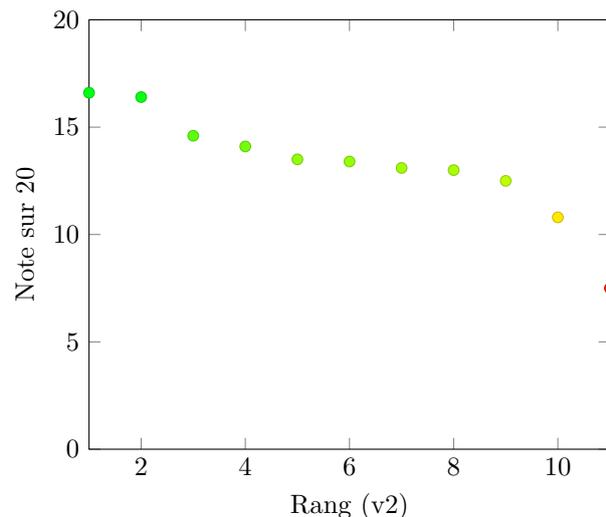
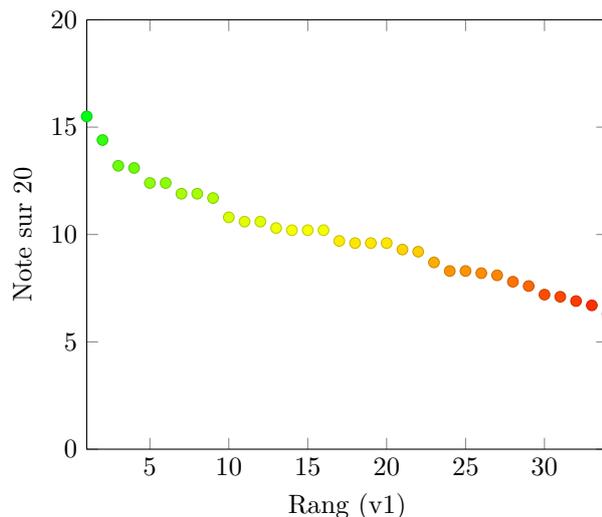
Problème : 32 ou 26 questions sur 4 points, total sur 128 (v1) ou 104 (v2), ramené sur 15 points

Soit $\varphi : x \mapsto \frac{1}{10} [10x]$, c le nombre de points obtenus sur la fiche de calculs et p le nombre de points obtenus sur les exercices, la note sur 20 est le réel $n = \min \left\{ \varphi \left(\frac{5c}{28} + \frac{15p}{\alpha} \right), 20 \right\}$ avec $\alpha = 80$ (v1) ou 76 (v2)

Statistiques

	Calculs	Problème (v1)	Problème (v2)	Précision (v1)	Précision (v2)
Minimum	4	25	27	36%	39%
Q1	10	33	46	54%	65%
Médiane	12	40	49	58%	76%
Q3	18	50	53	67%	81%
Maximum	26	66	64	86%	88%
Moyenne	13.9	41.6	48.9	59.2%	71.5%

Répartition des notes



Remarques générales

Exercice 1

- De nombreuses récurrences erronées ou approximatives.
- **Question 1.** L'expression de u_n en fonction de n ne doit dépendre que de n , et pas de réels λ et μ encore inconnus. Il fallait traiter la question jusqu'au bout...
- **Question 3.** Le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ ne suffit pas à justifier que u est croissante; on peut en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \geq u_n$, et donc que u est croissante **à partir du rang 1**.
- **Question 4.** Beaucoup d'erreurs. En procédant par récurrence double, et en obtenant le fait que si $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$, alors $u_{n+2} \geq 2n+1$, il fallait remarquer que $2n+1 \geq n+2$ uniquement pour $n \geq 1$; le cas $n=0$ **n'a pas été traité dans l'initialisation**, puisque « $u_{n+2} \geq n+2$ » pour $n=0$, ce n'est pas $u_0 \geq 0$, mais $u_2 \geq 2$...
- **Question 5.** Il est tout de même dommage de passer à côté du fait que (a_n) est géométrique. Attention, il n'existe pas une seule suite géométrique de raison -1 ; le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -a_n$ n'est pas suffisant pour affirmer que $a_n = (-1)^n$.
- **Question 6.** Vous pouviez éviter de faire une disjonction de cas suivant la parité de n en multipliant la relation par $(-1)^n$.

Exercice 2

- **Question 1a.** La loi utilisée ici est l'addition $+$, il convient donc d'utiliser plutôt les notations additives (et le vocabulaire adapté) : l'*inverse* d'un élément x pour $+$ est appelé *opposé* de x et est noté $-x$. Attention à ne pas confondre les propriétés à vérifier pour montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe et les propriétés que doit vérifier un groupe. Il ne s'agit pas ici de montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ contient un élément neutre pour $+$, mais de montrer que 0 appartient à $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. De même, on ne montre pas que tout élément $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est inversible pour $+$ (on le sait déjà : c'est un réel), mais que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, son opposé $-x$ (qu'on sait déjà exprimer) appartient à $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
- **Question 1b.** Le plus simple était de montrer ici que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Si vous souhaitez utiliser la définition d'un anneau, attention à n'oublier aucune des propriétés à vérifier.
- **Question 2b.** Attention : la négation de $(a, b) = (a', b')$ est $a \neq a'$ **ou** $b \neq b'$. Pour déduire directement de $(a - a') + (b - b')\sqrt{7} = 0$ le fait que $a - a' = b - b' = 0$, il faudrait avoir déjà montré que 0 s'écrit de manière unique sous la forme $c + d\sqrt{7}$ avec $c, d \in \mathbb{Z}$, ce qui n'est pas le cas.
- **Question 2c.** Ne pas oublier de vérifier que $\varphi(1) = 1$. Il n'est en revanche pas nécessaire de vérifier que $\varphi(0) = 0$, cela découle directement du fait que φ est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], +)$.
- **Question 3d.** Il ne faut pas oublier de vérifier que G est stable par \times . Par ailleurs, le fait que tout élément de G soit inversible (dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$) n'est pas suffisant : il faut vérifier que son inverse est bien un élément de G . Le plus simple ici était de montrer que G est un sous-groupe d'un groupe bien choisi, par exemple (\mathbb{R}^*, \times) ou $(\mathbb{Z}[\sqrt{7}]^\times, \times)$. Attention au fait que $(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], \times)$ n'est pas un groupe ! Il est encore une fois nécessaire d'utiliser le vocabulaire adapté suivant que vous utilisez la définition d'un groupe ou la notion de sous-groupe (loi de composition interne ou stabilité par la loi du groupe de référence, existence d'un élément neutre ou appartenance de l'élément neutre du groupe de référence, existence d'un inverse dans G ou stabilité par passage à l'inverse) et de ne pas oublier d'évoquer l'associativité si vous utilisez la définition.
- **Question 3e.** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, si $x + y\sqrt{7} \in G$, alors $x^2 - 7y^2 = 1$, ne suffit pas à répondre à la question : cela prouve que les éléments de G correspondent à **des** solutions de l'équation, pas qu'il y a une équivalence entre la résolution de l'équation et la détermination des éléments de G .

Exercice 3

- **Question 1.** Attention à la cohérence de ce que vous écrivez : $(f * (g * h))(n)$, ce n'est pas ~~$f * ((g * h)(n))$~~ , qui n'aurait aucun sens. Pour cette question, la deuxième écriture était largement plus facile à utiliser :

$$(f * (g * h))(n) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}^*} f(a)(g * h)(b) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}^*, ab=n} f(a) \sum_{c,d \in \mathbb{N}^*, cd=b} g(c)h(d) = \sum_{a,c,d \in \mathbb{N}^*, acd=n} f(a)g(c)h(d)$$

et de même pour $((f * g) * h)(n)$.

- **Question 6.** Le fait que $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe abélien fait partie du cours, car \mathcal{A} n'est rien d'autre que l'ensemble des suites complexes. Inutile donc de le redémontrer. Avec les questions précédentes, il ne restait que la distributivité de $*$ sur $+$ à démontrer, mais vous devez tout de même évoquer explicitement toutes les propriétés d'un anneau (oui, même celles qui ont été démontrées dans les questions précédentes). L'associativité de $*$ et l'existence d'un élément neutre pour $*$ doivent donc figurer dans votre réponse.
- **Question 12.** On vous demande de prouver l'existence d'un plus petit entier tel que « ... ». Soyez complet, sobre et efficace, et exhibez une partie de \mathbb{N} non vide et majorée. Vous ne pouvez pas vous contenter d'écrire que « $z^n = 1$ ~~donc~~ d existe » (quel est le lien ?).