Devoir surveillé n° 5 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 36 points, ramené sur 5 points.
- Présentation : sur 4 points, Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 136 points ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	31	102	$14,6$
Note minimale	10	32	6
Moyenne	$\approx 20,5$	$\approx 71,7$	$\approx 10,9$
Écart-type	$\approx 4,4$	≈ 19	$\approx 2,4$

Remarques générales.

Si vous sautez une question, il faut numéroter la réponse et indiquer qu'elle est admise ou non traitée.
Certains d'entre vous utilisent encore du blanc, on peut s'en servir uniquement pour changer un caractère, un symbole, une lettre ou un signe mais en aucun cas pour des phrase, paragraphes entiers ! ! ! ! L'utilisation de blanco est interdite aux concours.
Les variables ne sont pas toujours introduites, mais cela est moins fréquent qu'en début d'année, bravo continuez ainsi.

I. Entiers de Gauss.

1) Il est facile de passer beaucoup de temps (certains ont écrit 3 pages pour y répondre) sur ce type de question, qui rapporte peu de points au concours. Ainsi, les propriétés des lois de $\mathbb{C}$ ne sont pas à démontrer : $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives sur $\mathbb{C}$, inutile d'en dire plus. Le plus efficace était de montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$. Vous avez souvent omis de montrer que 1 appartient à $\mathbb{Z}[i]$, et est le même neutre pour la multiplication de $\mathbb{C}$.

2)a) Voir que $N(z) = z\bar{z}$ simplifiait beaucoup la question (ainsi que la suivante).
$(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe, vous ne pouvez donc dire que N est un morphisme puis parler de noyau.

2)b) $N(z)N(y) = 1$ ne permet de montrer $N(z) = 1$ qu'une fois avoir remarqué que $N(z), N(y) \in \mathbb{N}$.

3)a) Un nombre premier p peut s'écrire comme produit de deux entiers : $p = p \times 1$. Il convenait donc de montrer que, si z est réductible, $N(z)$ s'écrit comme produit de deux entier naturels non nuls et différents de 1.

3)b) J'ai lu beaucoup de tentatives d'arnaque du type « $1 + 3i$ est irréductible, or $N(1 + 3i) = 10$ n'est pas premier ». Il fallait bien entendu justifier que le nombre écrit est irréductible.

II. Suites récurrentes.

Le sujet a été bien traité dans l'ensemble.

4) Vous confondez la définition des suites adjacentes : les deux suites u et v sont de monotonies contraires et $u - v$ tend vers 0, avec le théorème des suites adjacentes : deux suites adjacentes convergent vers la même limite finie.

III. Étude d'une suite implicite.

2. « $\varphi_n' = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$ » NON, ce n'est pas homogène des deux côtes de l'égalité ou de même type.
Il y a énormément d'erreurs sur le signe de $x^n - x^{n-1}$. Cela n'arriverait pas si vous aviez le réflexe de FACTORISER ! $x^n - x^{n-1} = x^{n-1}(x-1)$.

3. Avant de dériver une fonctions, il faut justifier qu'elle est dérivable.
« $\varphi_n(x)$ » est continue, non c'est φ_n, un point en moins.
Il est cruciale de distinguer le TVI du corollaire du TVI, avant d'utiliser un théorème vous devez rappelez justifiez les hypothèses du dit théorème. Vos réponses n'étaient pas toujours des plus efficaces en terme de rédaction.

7. On pouvait utiliser la croissance de ψ sur $\mathbb{R}_+$: $1, \alpha, 2 \in \mathbb{R}_+$ et $\psi(1) < \psi(\alpha) < \psi(2)$ donc $1 < \alpha < 2$.
Mais pour faire cela, il fallait bien justifier que $1, \alpha, 2 \in \mathbb{R}_+$!
On pouvait aussi utiliser le TVI comme dans le corrigé. Mais utiliser les deux en même temps était un aveu d'incompréhension : le TVI n' a rien à voir du tout avec la monotonie.

8. Les limites qui dépendent de n, impossible !

9. La fonction φ_n^{-1} n'existe pas.

9.a. Il suffisait d'utiliser la croissance de ψ sur $\mathbb{R}_+$, et il était indispensable pour cela de s'assurer que $\alpha - \varepsilon, \alpha, \alpha + \varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

9.b. Pour montrer que $\varphi_n\left(1 + \dfrac{\alpha - \varepsilon}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \psi(\alpha - \varepsilon)$, on utilise la question 8, mais pour cela il faut vérifier son hypothèse : $\alpha - \varepsilon > 0$. Rare sont ceux qui ont répondu correctement à cette question.

9.c. Là encore, pour passer de 9.b. à 9.c., on utilisait que φ_n est croissante sur $[1 + \infty[$, et là encore il fallait bien préciser que $1 + \dfrac{\alpha - \varepsilon}{n}, x_n, 1 + \dfrac{\alpha + \varepsilon}{n} \in [1, +\infty[$.