Devoir surveillé n° 1 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 40 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 104 points + 4 points de présentation, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	36	69	$18,1$
Note minimale	14	19	$6,3$
Moyenne	$\approx 24,5$	$\approx 40,8$	$\approx 11,7$
Écart-type	$\approx 6,36$	$\approx 11,9$	≈ 3

Remarques générales.

Il faut encadrer tous vos résultats : à partir du prochain DS, les résultats non encadrés seront sanctionnés encore plus sévérement.

Il faut introduire toutes les variables que vous utilisez.

Attention, ce sont les fonctions qui sont dérivables, pas leurs images, donc « $f(x)$ est dérivable » n'a pas de sens. C'est : « f est dérivable ». De plus, on écrit « f est dérivable sur $[0,1[$ » ou « f est dérivable en tout point $x \in [0,1[$ » et non « f est dérivable pour tout $x \in [0,1[$ ».

Un certain nombre d'élèves répondent à certaines questions en commençant par affirmer le résultat qu'il faut démontrer, et en tirent des choses. C'est une grave erreur de logique, on ne peut pas démontrer le résultat comme ça, toutes les implications vont dans le mauvais sens.

I. Un exercice vu en TD.

Bien traité.

II. Autour de π.

1.a. Une fois que l'on a repéré que 1 est racine de P, on obtient $P = (X-1)(2X^2 - X - 1)$. Mais ce n'est pas fini ! Il faut encore factoriser $2X^2 - X - 1$.

1.b. et d. J'ai trop souvent lu que f était dérivable car « composée de fonctions dérivables » : f est ici une somme de fonctions, et il n'y a pas de composition. De même pour g : cette fois c'est un quotient de fonctions dérivables. Soyez précis dans vos formulations.

1.c et 1.e Pour déterminer les variations d'une fonction dérivable, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée. En revanche, déterminer les points d'annulation de la dérivée ne permet pas, en tout cas pas sans justification (qui sait le justifier ?), d'en déduire le signe de la dérivée, pour cela il résoudre $f'(x) \geqslant 0$.

1.d. Il faut commencer par justifier que le dénominateur de g ne s'annule pas.

1.e. On trouve $Q = -X^2 + 2X - 1$. Vous devez repérer ici une identité remarquable : $Q = -(X-1)^2$, ou au minimum chercher une racine évidente avant de vous lancer dans le discriminant.

1.f. Il est impossible de traiter cette question sans insister sur le fait que u et v sont strictement monotones (même si vous l'avez déjà dit avant) : c'est le point fondamental.

2.a. L'expression $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}$ se simplifie, il faut connaître la méthode, dite de la « quantité conjuguée » : $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}} = \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{1})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{1})(\sqrt{3}-\sqrt{1})} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{3^2-1^2} = 2-\sqrt{3}$.

2.b. Pensez à préciser que $\dfrac{\pi}{12} \in I$ avant d'appliquer la question 1.f.

3.b. Vous êtes allégrèment passer de $a_{n+1}^2 = \dfrac{1-b_n}{2}$ à $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-b_n}{2}}$ sans justifier et en particulier sans utiliser « valeur absolue », et donc sans se préoccuper du signe de a_{n+1}.

3.c. Pensez à préciser que $\dfrac{\pi}{3 \times 2^n} \in I$ avant d'appliquer la question 1.f.

III. Involutions continues de $\mathbb{R}$.

3. « f est croissante » ne signifie pas que $f(x) \geqslant x$.

5.a. Le fait qu'une fonction est continue et strictement décroissante n'assure pas que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérer par exemple la fonction $-\arctan$. Il fallait utiliser que $y = f(f(y))$. On pouvait aussi le faire avec le théorème de la bijection, mais pour cela il fallait d'abord montrer que f tendait vers $\pm\infty$ et $\mp\infty$. Or pour le montrer on utilisait que f n'était ni majorée ni minorée, et pour montrer ce dernier point, on utlisait le point présent ! C'était tout le but des questions qui suivaient, d'où l'intérêt de lire à l'avance les quelques questions qui suivent (voire même plus) pour avoir une idée du cheminement.

5.c. Toute la difficulté de cette question était de calculer les limites de f en $\pm\infty$. Le théorème de la limite monotone qui vous était rappelé en préambule ne précisait pas dans quels cas ces limites étaient finies ou infinies : c'était à vous de le démontrer.