VII Théorie des ensembles

2 août 2024

Table des matières

1 Définitions.

Nous développons ici la notion d'ensemble, en partant d'une définition intuitive et peu formelle : un ensemble est une collection d'objets mathématiques. Si un objet x est dans cette collection-ensemble E, on note alors $x \in E$ la phrase « x appartient à E ». Sa négation, « x n'appartient pas à E », s'écrit $x \notin E$.

Remarque 1.0.1.
Traditionnellement, on essaie de noter les ensembles avec des lettres majuscules et leurs éléments avec des lettres minuscules.

1.1 Appartenance, égalité.

Définition 1.1.1 (Extentionnalité)**.**
Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments :

$$E = F \iff \forall x \ (x \in E \iff x \in F).$$

Remarque 1.1.2.
Intuitivement, cette proposition dit que la caractéristique qui définit un ensemble, ce sont ses éléments. Autrement dit, si on voit les ensembles comme des sacs contenant des objets, le sac n'a aucune caractéristique qui puisse le distinguer d'un autre. Cette caractéristique est très particulière au monde idéalisé des ensembles mathématiques. En informatique on verra par exemple qu'on peut avoir deux tableaux contenant les mêmes éléments dans le même ordre et qui ne sont pas le même objet.

Définition 1.1.3 (Ensemble vide)**.**
On note $\varnothing$ l'ensemble vide.

Définition 1.1.4.
Étant donnés des objets x_1, x_2, …, x_n, on note $\{ x_1, \dots, x_n \}$ l'ensemble contenant exactement x_1, …, x_n.

Pour tout ensemble E et tout prédicat P, on note $\{ x \in E \mid P(x) \}$ l'ensemble dont les éléments sont exactement les éléments de E vérifiant P.

Pour tout ensemble E et toute expression $e[x]$ contenant une variable x, on note $\{ e[x] \mid x \in E \}$ l'ensemble des objets mathématiques qui s'écrivent sous la forme $e[x]$ pour au moins un $x \in E$.

Remarque 1.1.5.
1. Pour le premier point, l'ordre des éléments n'importe pas, ni le nombre de fois où ils apparaissent dans la liste des éléments. $\{ 1, 2 \} = \{ 2, 1 \} = \{ 1, 2, 1 \}$. On parle de définition de l'ensemble en extension.
2. Pour le second point, on parle de définition en compréhension.

Exemple 1.1.6.
Un même ensemble peut parfois être défini en extension ou en compréhension :

$$\begin{aligned} E &= \{0; 1; 4; 9\} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \leqslant 15 \text{ et } \exists p \in \mathbb{N},\ n = p^2 \right\}. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, E et F désignent deux ensembles.

1.2 Inclusion, ensemble des parties.

Définition 1.2.1 (Inclusion)**.**
On dit que E est *inclus* dans F, ce que l'on note $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F, *i.e.*

$$\forall x \in E \ x \in F.$$

Si $E \subset F$, on dit que E est une *partie* ou un *sous-ensemble* de F.

Exemple 1.2.2.
1. Pour tout ensemble E, on a $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$.
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
3. $\{1, \{1; 2\}, \mathbb{R}\} \subset \{\mathbb{Z}, \pi, 1, \{1; 2\}, \mathbb{R}\}$.
4. $\{\{1; 2\}\} \not\subset \{1; 2\}$.

Remarque 1.2.3.
Attention à ne pas confondre. $\in$ et $\subset$. Ainsi

$1 \in \{1,2\}, \{1\} \subset \{1,2\}$, mais $\{1\} \notin \{1,2\}$. En revanche on a $\{1,2\} \in \{1,2,\{1,2\}\}$ ainsi que $\{1,2\} \subset \{1,2,\{1,2\}\}$.

En pratique pour démontrer une inclusion, on utilise la définition et la manière usuelle de démontrer une proposition universellement quantifiée.

Exemple 1.2.4.
On note E l'ensemble des entiers relatifs pairs qui sont des multiples de 15 et F l'ensemble des entiers relatifs multiples de 6. Montrer $E \subset F$.

Proposition 1.2.5 (Transitivité)**.**
Soit E, F, G trois ensembles, si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Démonstration.
Soit x un objet. Si $x \in E$, comme $E \subset F$, on a $x \in F$. De même, comme $F \subset G$, on a $x \in G$. $\square$

Théorème 1.2.6 (Double inclusion)**.**
Soit E, F deux ensembles, alors

$$(E = F) \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Démonstration.
Il est clair que pour tout ensemble A, on a $\forall x \in A \quad x \in A$, donc $A \subset A$. Le sens direct est donc évident.

Montrons l'implication réciproque. Supposons $E \subset F$ et $F \subset E$. Alors soit x un objet mathématique quelconque. Montrons $x \in E \iff x \in F$:
- Supposons $x \in E$, alors comme $E \subset F$, on a $x \in F$.
- Supposons $x \in F$, alors comme $F \subset E$, on a $x \in E$.

donc $x \in E \iff x \in F$.

Donc $\forall x \quad x \in E \iff x \in F$.

Donc $E = F$. $\square$

Remarque 1.2.7.
En pratique, on a deux méthodes pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F :
- ou bien on utilise ce théorème ;
- ou bien on utilise directement la propriété d'extentionnalité, en montrant que pour tout x, $x \in E \iff x \in F$ par équivalences successives.

Axiome 1.2.1 (Ensemble des parties de E)**.**
Pour tout ensemble E, on admet l'existence d'un ensemble, noté $\mathscr{P}(E)$ et appelé *ensemble des parties de E* et dont les éléments sont exactement les sous-ensembles de E. Ainsi pour tout ensemble F, on a

$$F \in \mathscr{P}(E) \Leftrightarrow F \subset E.$$

Exercice 1.2.8.
Déterminer $\mathscr{P}(\{1,2,3\})$. Combien cet ensemble admet-il d'éléments ?

Remarque 1.2.9.
Ne pas oublier $\varnothing$ dans l'ensemble des parties.

Exercice 1.2.10.
Déterminer $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\{\varnothing\})$ et $\mathscr{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$.

Proposition 1.2.11.
Si un ensemble E possède $n \in \mathbb{N}$ éléments, alors $\mathscr{P}(E)$ possède 2^n éléments.

Démonstration.
Cela sera démontré au second semestre, dans le cours de dénombrement. $\square$

1.3 Réunion, intersection, complémentaire.

Dans cette partie A et B désignent deux ensembles.

Définition 1.3.1.
1. On appelle *réunion de A et B* notée $A \cup B$, l'ensemble dont les éléments sont exactement ceux qui sont dans A ou dans B, autrement dit, pour tout objet x,

$$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B).$$

2. On appelle *intersection de A et B* notée $A \cap B$ dont les éléments sont exactement ceux qui sont dans A et dans B à la fois, autrement dit, pour tout objet x,

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$

Exemple 1.3.2.
On pose $E = \{ 0,1,2,4 \}$ et $F = \{ 0,1,3,4,5,6 \}$. Que vaut $E \cup F$? $E \cap F$?

Proposition 1.3.3.
Soit A, B, C trois ensembles.

1. $\cap$ et $\cup$ sont associatives : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*idem* pour $\cup$).
2. $\cap$ et $\cup$ sont commutatives : $A \cap B = B \cap A$ (*idem* pour $\cup$).
3. On a toujours $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
4. Si $A \subset B$, on a toujours $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$.

Démonstration.
Élémentaire, revenir aux définitions. $\square$

Remarque 1.3.4.
La dernière propriété signifie que $A \mapsto A \cap C$ et $A \mapsto A \cup C$ sont croissantes (au sens de l'inclusion).

Définition 1.3.5.
On dit que deux ensembles sont *disjoints* si leur intersection est vide.

Définition 1.3.6.
On peut généraliser cette notion à une famille d'ensembles.

1. Si E est un ensemble d'ensembles, on note $\bigcup_{X \in E} X$ la réunion de tous les éléments de E et, dans le cas où E est non vide, $\bigcap_{X \in E} X$ l'intersection de tous les éléments de E. Pour tout x, on a les propriétés :
$$x \in \bigcup_{X \in E} X \iff \exists X \in E,\ x \in X;$$
$$x \in \bigcap_{X \in E} X \iff \forall X \in E,\ x \in X.$$
2. Plus généralement, si on considère une famille d'ensemble $(A_i)_{i \in I}$, on note $\bigcup_{i \in I} A_i$ la réunion de tous les A_i pour $i \in I$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ l'intersection de tous les A_i. Pour tout x, on a les propriétés :
$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I,\ x \in A_i\ ;$$
$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Exercice 1.3.7.
1. Que valent $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1]$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [n, n+1]$?
2. Quel est l'ensemble de définition de tan ?
3. Que vaut chacun des ensembles ci-dessous ?

$$\bigcup_{\varepsilon \in]0,1]} [\varepsilon, 1] \qquad \bigcup_{\varepsilon \in]0,1]}]\varepsilon, 1] \qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1]} [0, \varepsilon] \qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1]} [0, \varepsilon[$$
$$\bigcap_{\varepsilon \in]0,1]}]0, \varepsilon] \qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1]}]0, \varepsilon[\qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1] \cap \mathbb{Q}} [0, \varepsilon] \qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1] \cap \mathbb{Q}} [0, \varepsilon[$$

Proposition 1.3.8.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles et B un ensemble.

1. Si, pour tout $i \in I$, $A_i \subset B$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \subset B$.
2. Si, pour tout $i \in I$, $B \subset A_i$, alors $B \subset \bigcap_{i \in I} A_i$.
3. Si $j \in I$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Démonstration.
Élémentaire. $\square$

Théorème 1.3.9 (Distributivité)**.**
La réunion et l'intersection sont distributives l'une sur l'autre. Plus précisément, soit A, B et C trois ensembles. Alors on a les deux égalités suivantes :
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Plus généralement, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles et B un ensemble, alors

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B); \tag{1}$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B). \tag{2}$$

Démonstration.
Faire un dessin pour les deux premières égalités.

Les résultats se montrent aisément par double inclusion. On donne la démonstration de l'égalité (2).

Pour tout x :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B &\Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow x \in B \text{ et } \exists i_0 \in I,\ x \in A_{i_0} \\ &\Leftrightarrow \exists i_0 \in I,\ x \in A_{i_0} \cap B \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B). \end{aligned}$$

□

Exercice 1.3.10.
Montrer les propriétés (2) et (1) en raisonnant par double inclusion et en prenant soin de bien revenir aux définitions des objets manipulés.

Définition 1.3.11.
On appelle A *privé de* B, ou *différence de* A *et* B, ou A *moins* B, l'ensemble noté $A\setminus B$ ou $A-B$, tel que pour tout objet x, $x \in A \setminus B$ si et seulement si $x \in A$ et $x \notin B$.

Cet ensemble est bien défini d'après le schéma de compréhension.

Exercice 1.3.12.
Montrer que $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Définition 1.3.13.
Si $A \subset E$, on appelle *complémentaire de* A *dans* E noté $\complement_E A$ ou A^C ou $\overline{A}$ quand il n'y a pas de confusion, l'ensemble $E \setminus A$.

Proposition 1.3.14.
Si A et B sont deux parties de E, on a $A \setminus B = A \cap B^C$.

Démonstration.
Faire un dessin.

Soit x quelconque. On a $A \subset E$ donc $x \in A \iff (x \in A \text{ et } x \in E)$. On a donc :

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\iff x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in A \text{ et } (x \in E \text{ et } (x \notin B)) \\ &\iff x \in A \text{ et } x \in E \setminus B \\ &\iff x \in A \cap B^C. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.15.
Soit E un ensemble et A une partie de E, alors $\overline{\overline{A}} = A$.

Démonstration.
C'est une conséquence de la propriété de double négation : soit x un élément de E, on a $x \in A \Leftrightarrow \neg(\neg(x \in A))$. □

Proposition 1.3.16.
Soit E un ensemble et A une partie de E, alors $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \varnothing$.

Démonstration.
Soit $x \in E$, on a $x \in A$ ou $x \notin A$ (tiers exclu), donc $x \in A \cup \bar{A}$.

De plus, on ne peut avoir simultanément $x \in A$ et $x \notin A$, donc $A \cap \bar{A} = \varnothing$. □

Théorème 1.3.17 (Relations de De Morgan)**.**
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Alors on a

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i\in I} \left(A_i^C\right);$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} \left(A_i^C\right).$$

Démonstration.
On montre le deuxième point. Les deux termes de l'égalité sont évidemment des sous-ensembles de E. Considérons donc un $x \in E$ quelconque et montrons que x appartient au premier ensemble si et seulement s'il appartient au deuxième. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C &\iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \\ &\iff \neg(\exists i \in I\ x \in A_i) \\ &\iff \forall i \in I\ x \notin A_i \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} \left(A_i^C\right). \end{aligned}$$

Le premier se déduit de la seconde en passant au complémentaire pour la famille $(A_i^C)_{i\in I}$. □

Définition 1.3.18.
Soit E un ensemble, soit $\mathscr{F} = (F_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

Alors, $\mathscr{F}$ est un *recouvrement disjoint* de E si

— les éléments de $\mathscr{F}$ sont deux à deux disjoints :

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \varnothing\ ;$$

— E est l'union des éléments de $\mathscr{F}$:

$$E = \bigcup_{i\in I} F_i.$$

On dit de plus que $\mathscr{F}$ est une *partition* de E si c'est un recouvrement disjoint de E sans aucune partie vide :

$$\forall i \in I, \quad F_i \neq \varnothing.$$

Remarque 1.3.19.
On pourrait bien entendu parler de recouvrement, mais nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser ce vocabulaire cette année.

Nous utiliserons davantage les partitions que les recouvrements disjoints.

Exemple 1.3.20.

On considère

$$\begin{aligned} F_0 &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0\ [3] \,\} \\ &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ n = 3p \,\} \\ F_1 &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 1\ [3] \,\} \\ &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ n = 3p + 1 \,\} \\ F_2 &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 2\ [3] \,\} \\ &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ n = 3p + 2 \,\} \end{aligned}$$

Alors, $\{F_0, F_1, F_2\}$ est une partition de $\mathbb{Z}$ (en trois parties).

1.4 Produit cartésien.

Définition 1.4.1.
On admettra qu'étant donné deux objets x et y on peut construire un objet appelé *couple* (x, y) et qu'on a la propriété suivante pour tous objets x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \iff (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2).$$

Remarque 1.4.2.
On peut généraliser cette notion à celle de n-uplets.

Définition 1.4.3.
Soient E et F deux ensembles. On admet qu'on peut construire un ensemble noté $E \times F$, appelé *produit cartésien de E et F*, dont les éléments sont les couples avec $x_1 \in E$ et $x_2 \in F$. On définit de même le produit cartésien de n ensembles $E_1 \dots E_n$, noté $E_1 \times \dots \times E_n$, et formé des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$. Si les E_i sont égaux à un ensemble E, on note ce produit E^n.

Remarque 1.4.4.
Attention à ne pas confondre l'ensemble $\{x, y\}$ avec le couple (x, y).

Exemple 1.4.5.
L'ensemble $\mathbb{R}^2$, le rectangle $[1, 3] \times [-1, 4]$, la partie $[1, 3[\times] - 1, 4]$ (voir figure 1), la bande $[0, 1] \times \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \,\}$ (le représenter).

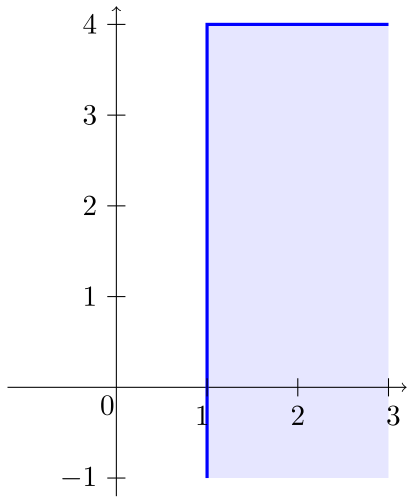

Figure 1 – Représentation de $[1, 3[\times] - 1, 4]$.

2 Interprétation logique

Soit E un ensemble, P et Q deux prédicats. On pose

$$A = \{ x \in E \mid P(x) \} ;$$
$$B = \{ x \in E \mid Q(x) \} .$$

Soit $x \in E$. On a alors les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in A \cap B &\iff P(x) \text{ et } Q(x);\\
x \in A \cup B &\iff P(x) \text{ ou } Q(x);\\
x \notin A &\iff \neg(P(x));\\
A = E &\iff \forall x \in E,\ P(x);\\
A \neq \varnothing &\iff \exists x \in E,\ P(x);\\
A \subset B &\iff \forall x \in E,\ (P(x) \Rightarrow Q(x));\\
A = B &\iff \forall x \in E,\ (P(x) \iff Q(x)).
\end{aligned}$$