# XXX Fonctions de deux variables

2 août 2024

## Table des matières

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne canonique.

# 1 Fonctions numériques à deux variables

## 1.1 Petite topologie du plan

**Définition 1.1.1** (boules).
Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

On appelle *boule ouverte de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$B(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|a - x\| < r \right\}.$$

On appelle *boule fermée de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$\overline{B}(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|a - x\| \leqslant r \right\}.$$

On appelle *sphère de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$\overline{S}(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|a - x\| = r \right\}.$$

**Remarque 1.1.2.**
La boule fermée s'obtient en ajoutant à la boule ouverte la sphère qui la délimite.

**Définition 1.1.3** (ouverts du plan).
Une partie $A$ du plan est dite *ouverte* si

$$\forall a \in A,\ \exists r > 0,\ B(a, r) \subset A.$$

**Exemple 1.1.4** (exemples fondamentaux).
Sont des parties ouvertes du plan : le plan, $\varnothing$, toute boule ouverte, un produit d'intervalles ouverts.

**Proposition 1.1.5** (voir figure 1).
Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $(x_0, y_0) \in A$. Alors, il existe deux intervalles ouverts $I$ et $J$ tels que

— $x_0 \in I$ ;
— $y_0 \in J$ ;
— $I \times J \subset A$.

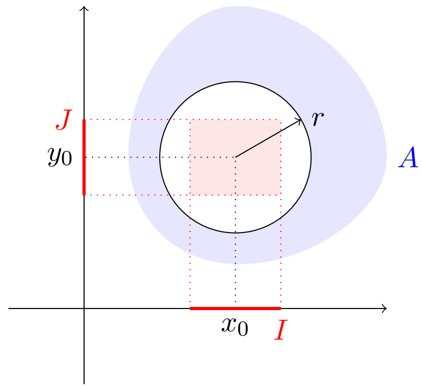


FIGURE 1 – Un ouvert $A$, contenant un disque, contenant un rectangle.

**Démonstration.**
Il existe $r > 0$ tel que le $B((x_0, y_0), r) \subset A$. En posant

$$I = \left] x_0 - \frac{r}{\sqrt{2}} ; x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}} \right[$$
$$J = \left] y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}} ; y_0 + \frac{r}{\sqrt{2}} \right[$$

on vérifie aisément que $I \times J \subset B((x_0, y_0), r)$, $I$ et $J$ étant bien des intervalles ouverts contenant respectivement $x_0$ et $y_0$. □

## 1.2 Représentation d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on considère un ouvert $A$ de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : A \to \mathbb{R}$.

**Rappel 1.2.1.**
Le graphe de $f$ est

$$\Gamma = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \}.$$

**Remarque 1.2.2.**
Le graphe de $f$ est formellement une partie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, que l'on identifie à $\mathbb{R}^3$. On considère donc que le graphe de $f$ est

$$\{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A \}.$$

Ainsi, le graphe de $f$ se représente comme une « nappe » au dessus de la partie $A$, $f(x, y)$ désignant l'altitude du point d'abscisse $x$ et d'ordonnée $y$ (voir figure 2).

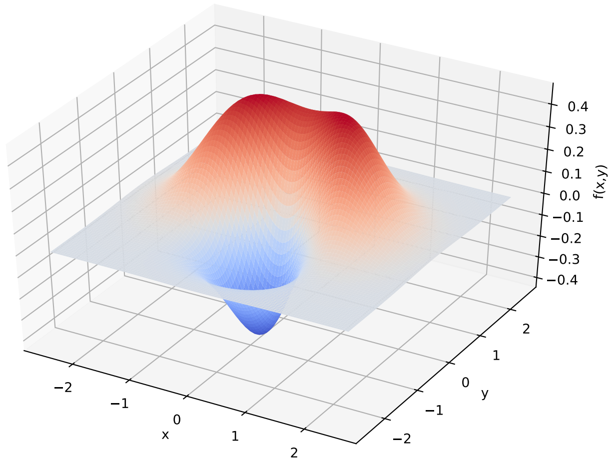


FIGURE 2 – Représentation de $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}$.

## 1.3 Continuité

Dans cette partie, on considère un ouvert $A$ de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : A \to \mathbb{R}$.

**Définition 1.3.1.**
Soit $a \in A$, la fonction $f$ est continue en $a$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\quad \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction $f$ est continue sur $A$ si elle est continue en tout point $a$ de $A$.

**Proposition 1.3.2** (opérations)**.**
Soit $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $A$.

1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur $A$.
2. Les fonctions $fg$, $|f|$, $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues sur $A$.

**Démonstration.**
C'est la même chose que pour les fonctions réelles. □

**Proposition 1.3.3** (composition à gauche)**.**
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $A$, soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Alors, $\varphi \circ f$ est continue sur $A$.

**Démonstration.**
C'est la même chose que pour les fonctions réelles. □

**Proposition 1.3.4** (composition à droite)**.**
Soit $A, B$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continues sur $A$, soit $u, v : B \to \mathbb{R}$ continues telles que $u(B) \times v(B) \subset A$.

Alors, $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$ est continue sur $B$.

**Démonstration.**
C'est la même chose que pour les fonctions réelles. □

**Lemme 1.3.5** (continuité des projections)**.**
Les fonctions $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ et $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

**Démonstration.**
Il suffit de voir que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$ et pour $i \in \{1, 2\}$,

$$|\pi_i(a) - \pi_i(b)| = |\pi_i(a - b)| \leqslant \|a - b\|\,.$$

□

**Définition 1.3.6.**
On appelle *fonction polynomiale de deux variables* toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ combinaison linéaire des fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto x^p y^q,$$

pour $p, q \in \mathbb{N}$.

**Proposition 1.3.7.**
Toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Démonstration.**
Il suffit d'utiliser le résultat du lemme 1.3.5, puis la stabilité de l'ensemble des fonctions continues par combinaison linéaire et produit. □

**Exercice 1.3.8.**
En quels points les fonctions

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

et

$$g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

sont-elles continues ?

# 2 Introduction au calcul différentiel

Dans cette partie on considère $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f$ une application de $U$ dans $\mathbb{R}$.

## 2.1 Dérivées partielles

**Définition 2.1.1.**
Soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors d'après le lemme 1.1.5 assure qu'il existe deux intervalles ouverts $I$ et $J$ tels que $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ et $I \times J \subset U$. On considère alors les deux *fonctions partielles* de $f$ :

— $y_0$ étant fixé, la première fonction partielle de $f$ est $f_1 : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y_0)$.

— $x_0$ étant fixé, la seconde fonction partielle de $f$ est $f_2 : J \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x_0, y)$.

**Définition 2.1.2.**
Nous gardons les notations précédentes $f_1$ et $f_2$ pour les fonctions partielles de $f$.
On dit que la fonction $f$ est dérivable en un point $(x_0, y_0)$ par rapport à sa première variable si la fonction partielle $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en $x_0$. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

La fonction $f$ est dite dérivable par rapport à sa première variable sur $U$ si elle l'est en tout point de $U$.

De même, on dit que la fonction $f$ est dérivable en un point $(x_0, y_0)$ par rapport à sa deuxième variable si la fonction partielle $f_2 : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en $y_0$. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

La fonction $f$ est dite dérivable par rapport à sa deuxième variable sur $U$ si elle l'est en tout point de $U$.

**Remarque 2.1.3.**
La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ signifie la dérivation par rapport à la *première* variable de la fonction $f$, et est parfois notée $D_1 f$, ou $\partial_1 f$, *idem* pour la dérivation par rapport à la seconde variable.

Si l'on a noté une fonction $f : (u, v) \mapsto [...]$, on pourra bien entendu écrire $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ pour signifier la dérivation par rapport à la première variable de $f$, *idem* pour la dérivation par rapport à la seconde variable.

On évitera absolument de considérer une fonction $f : (y, x) \mapsto [...]$.

On pourra aussi utiliser le symbole $\dfrac{\partial}{\partial \heartsuit}$ pour signifier la dérivation partielle d'une expression par rapport à la variable $\heartsuit$, toutes les autres variables étant considérées comme fixées.

**Exemple 2.1.4.**
Avec $f : (x, y) \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-x+y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 y \mathrm{e}^{-x+y^2}.$$

**Remarque 2.1.5 ( ).**
Une fonction de deux variables peut être dérivable par rapport à chacune de ses deux variables, sans pour autant être continue.

Par exemple, la fonction définie par

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas continue.

La dérivabilité par rapport à chacune des variables est élémentaire, la non continuité en 0 découle par exemple du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x, x) = \frac{1}{2}.$$

Il suffit ensuite prendre $x$ suffisamment petit pour nier la continuité de $f$.

## 2.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

**Définition 2.2.1.**
La fonction $f$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ si $f$ est dérivable par rapport à ses deux variables sur $U$ et si les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $U$.

**Proposition 2.2.2.**
Toute fonction polynomiale de deux variables est de classe $\mathscr{C}^1$.

**Démonstration.**
Une fonction polynomiale de deux variables est dérivable par rapport à chacune de ses variables, et ses dérivées partielles sont polynomiales, donc continues. □

**Définition 2.2.3** (notation $o$)**.**
Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$, soit $a \in U$.

On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $a$ s'il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ continue en $a$ et vérifiant $\varepsilon(a) = 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in U$,

$$f(x, y) = g(x, y)\varepsilon(x, y).$$

On note ceci

$$f(x, y) \underset{(x,y)\to a}{=} o(g(x, y)).$$

**Théorème 2.2.4** (DL à l'ordre 1)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$, soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) \\ &+ h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|). \end{aligned}$$

**Démonstration** (hors-programme)**.**
Pour alléger les notations, on note $a = (x_0, y_0)$.

Soit $I$ et $J$ deux intervalles ouverts vérifiant $I \times J \subset U$, et tels que $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$. Il existe notamment $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $u \in U$, si $\|a - u\| \leqslant \alpha_0$, alors $u \in I \times J$. Notons $B$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\alpha_0$.

On définit $\varepsilon : B \to \mathbb{R}$ par $\varepsilon(0, 0) = 0$ et si $(h, k) \neq (0, 0)$ :

$$\varepsilon(h, k) = \frac{1}{\|(h, k)\|}\Big(f(a + (h, k)) - f(a) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big)$$

Montrons que la fonction $\varepsilon$ est continue en $(0, 0)$. Considérons $\eta > 0$.

Pour $u = (h, k)$ suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \left|f(a + u) - f(a) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \\ &= \Big|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ &\qquad + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big| \\ &\leqslant \underbrace{\left|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right|}_{\Delta_1} \\ &\qquad + \underbrace{\left|f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right|}_{\Delta_2} \end{aligned}$$

Comme $f(\cdot, y_0 + k)$ est dérivable sur $I$, par le théorème des accroissements finis, il existe $t_1$ entre $x_0$ et $x_0 + h$ vérifiant

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k).$$

On a donc

$$\Delta_1 = |h|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right|.$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $a = (x_0, y_0)$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h, k)\| \leqslant \alpha_1$, alors

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \leqslant \eta,$$

ce qui donne $|\Delta_1| \leqslant \eta\,\|(h, k)\|$.

On procède de même pour $\Delta_2$, et il existe donc $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h, k)\| \leqslant \alpha_2$, alors $|\Delta_1| \leqslant \eta\,\|(h, k)\|$.

Ainsi, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h, k)\| \leqslant \min(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, alors $|\varepsilon(h, k)| \leqslant 2\eta$, ce qui est bien le résultat demandé. □

**Remarque 2.2.5** (plan tangent)**.**
Sous les mêmes hypothèses,

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

est l'équation d'un plan, appelé *plan tangent* au graphe de $f$ en $(x_0, y_0)$.

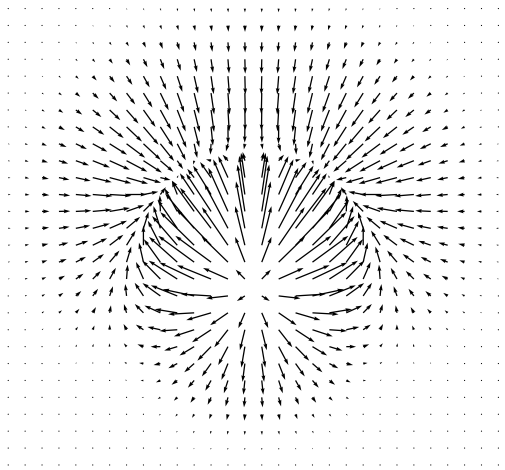

Figure 3 – Champ de vecteurs de $\nabla f$, pour $f : (x,y) \mapsto (x^2+y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

**Corollaire 2.2.6.**
Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors $f$ est continue.

**Définition 2.2.7** (gradient)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$, soit $(x_0, y_0) \in U$. On définit le *gradient* de $f$ en $(x_0, y_0)$ comme le vecteur

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

**Remarque 2.2.8.**
Le théorème 2.2.4 s'écrit alors ainsi, avec $a = (x_0, y_0)$ :

$$f(a+u) \underset{u\to(0,0)}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), u\rangle + o(\|u\|).$$

**Exemple 2.2.9.**
Le champ de vecteur de l'exemple du début du chapitre est tracé dans la figure 3.

## 2.3 Dérivées directionnelles

**Définition 2.3.1** (dérivée selon un vecteur)**.**
Soit $a \in U$, soit $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, soit $f : U \to \mathbb{R}$. La fonction $f$ est dite *dérivable selon le vecteur $v$ en $a$* si la fonction $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.

La dérivée de cette fonction en 0 est alors appelée *dérivée* de $f$ selon $v$ en $a$, et est notée $D_v f(a)$ :

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

**Remarque 2.3.2.**
En notant $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a sous réserve d'existence :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = D_{e_1} f(a),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = D_{e_2} f(a).$$

**Remarque 2.3.3.**
Si $\|v\| = 1$, $D_v f(a)$ est la pente de la droite tangente au graphe de $f$ en $a$ et dirigée par $v$.

**Théorème 2.3.4.**
Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en $a \in U$, alors $f$ admet des dérivées selon tous les vecteurs en $a$, et pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ :

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle.$$

**Remarque 2.3.5.**
On a donc pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ non nuls :

$$D_{(h,k)} f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

**Démonstration.**
Notons $v = (h,k)$ et $a = (x_0, y_0)$. Soit $t \neq 0$.
Soit $\alpha > 0$ tel que la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $\alpha$ soit incluse dans $U$. Notons alors $B$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\alpha$.

Par le théorème de développement limité à l'ordre 1 de $f$, qui est de classe $\mathscr{C}^1$,

$$f(a+tv) \underset{(th,tk)\to(0,0)}{=} f(a) + th\frac{\partial f}{\partial x}(a) + tk\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|tv\|)$$

Il existe donc une fonction $\varepsilon$ définie sur $B$ continue en $(0,0)$ et vérifiant $\varepsilon(0,0) = 0$ telle que, pour tous tels $a, v, t$,

$$f(a+tv) \underset{(th,tk)\to(0,0)}{=} f(a) + th\frac{\partial f}{\partial x}(a) + tk\frac{\partial f}{\partial y}(a) + |t|\,\|v\|\,\varepsilon(tv),$$

ce que l'on écrit

$$f(a+tv) \underset{t\to 0}{=} f(a) + th\frac{\partial f}{\partial x}(a) + tk\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(t).$$

Ainsi, $t \mapsto f(a+tv)$ admet un DL à l'ordre 1 en 0, donc est dérivable en 0, et immédiatement

$$D_v f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

□

**Remarque 2.3.6.**
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\nabla f(a)$ est la direction selon laquelle croît/décroît le plus vite, c'est-à-dire la direction de la pente la plus forte.

## 2.4 Composition, règle de la chaîne

**Théorème 2.4.1** (règle de la chaîne)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x, y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $x(I) \times y(I) \subset U$.

Alors, $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t),y(t))) = x'(t)&\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \\ &+ y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).\end{aligned}$$

**Démonstration.**
Soit $t_0 \in I$. Notons $a = (x(t_0), y(t_0))$. Pour $t \in I$, on note aussi $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Comme $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut appliquer le théorème de développement limité à l'ordre 1. Il existe donc une fonction $\varepsilon$ continue en 0, vérifiant $\varepsilon(0,0) = 0$ et telle que pour tout $u = (h, k)$ tel que $a + u \in U$ :

$$f(a+u) = f(a) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|u\|\,\varepsilon(u).$$

On a donc pour $t \in I$ :

$$\begin{aligned}f(\gamma(t)) = f(a) &+ (x(t) - x(t_0))\frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ &+ (y(t)-y(t_0))\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|\gamma(t) - a\|\,\varepsilon(\gamma(t)-a).\end{aligned}$$

Comme $x$ et $y$ sont dérivables, on peut écrire leurs développements limités à l'ordre 1. Il existe donc deux fonctions $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ de limite nulle en 0 telles que, pour tout $t \in I$,

$$x(t) - x(t_0) = (t-t_0)x'(t_0) + (t-t_0)\varepsilon_1(t),$$
$$y(t) - y(t_0) = (t-t_0)y'(t_0) + (t-t_0)\varepsilon_2(t).$$

On a donc

$$\begin{aligned}f(\gamma(t)) = f(a) + (t-t_0)&\left(x'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + y'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \\ &+ R(t),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}R(t) = (t-t_0)&\left(\varepsilon_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \varepsilon_2(t)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \\ &+ \|\gamma(t)-a\|\,\varepsilon(\gamma(t)-a).\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $R(t) = o(t-t_0)$. Comme $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées au voisinage de 1, et comme $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ tendent vers 0, on peut écrire que

$$\varepsilon_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \varepsilon_2(t)\frac{\partial f}{\partial y}(a) = o(1).$$

De plus, comme $x$ et $y$ sont dérivables en $a$, par composition $\left\|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right\| \underset{t\to t_0}{\to} \|(x'(a), y'(a))\|$ et donc,

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)-a\| &= |t-t_0|\left\|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right\| \\ &= |t-t_0| \times O(1) \\ &= O(t-t_0)\end{aligned}$$

Par composition, on a $\varepsilon(\gamma(t)-a) = o(1)$, ce qui permet de conclure. □

**Remarque 2.4.2.**
Sous les mêmes hypothèses, notons $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$. Cette fonction $\gamma$ est appelée *arc de classe* $\mathscr{C}^1$. La règle de la chaîne donne la dérivée de $f$ suivant l'arc $\gamma$, et peut s'écrire comme suit :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle.$$

**Définition 2.4.3.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Si $z \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau de $f$ d'altitude $z$* la partie

$$\left\{\, a \in \mathbb{R}^2 \mid f(a) = z \,\right\}.$$

**Exemple 2.4.4.**
On a tracé dans la figure 4 les lignes de niveau correspondant à la fonction tracée dans la figure 2.

**Exemple 2.4.5.**
Vous trouverez dans la figure 5 un exemple de carte IGN, faisant figurer les lignes de niveau du terrain. Avec un peu d'habitude, on arrive très bien à se représenter le terrain !

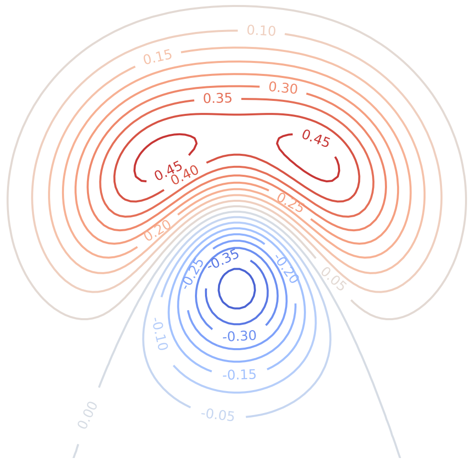


FIGURE 4 – Lignes de niveau de $f : (x,y) \mapsto (x^2+y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

**Remarque 2.4.6.**
La ligne de niveau d'altitude $z$ est donc $f^{-1}(\{z\})$.

**Proposition 2.4.7.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, soit $\gamma : I \to U$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\gamma(I)$ est inclus dans une ligne de niveau de $f$.

Alors, pour tout $t \in I$, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t)$.

**Démonstration.**
Immédiat, étant donné que pour tout $t \in I\ : (f \circ \gamma)'(t) = 0$. □

**Remarque 2.4.8.**
La propriété précédente est souvent résumée sous la locution « le gradient de $f$ est orthogonal aux lignes de niveau de $f$ ». En effet, $\gamma'(t)$ dirige la droite tangente à l'arc $\gamma$ au point $\gamma(t)$ (voir figure 6).

En vertu de la remarque 2.3.6, la direction de plus forte pente est donc orthogonale aux lignes de niveau.

Le théorème des fonctions implicites (hors programme) permet de montrer que, sous certaines hypothèses, les lignes de niveau d'une fonction forment des arcs de classe $\mathscr{C}^1$.

**Théorème 2.4.9.**
Soit $U, V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $\varphi, \psi : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\varphi(V) \times \psi(V) \subset U$.

Soit

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \end{array} \right. .$$

Alors, $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $V$ et pour tout $(u,v) \in V\ $ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \end{aligned}$$

**Remarque 2.4.10** (à la physicienne)**.**
Les formules précédentes sont quelque peu difficiles à retenir. En notant $x$ la fonction $\varphi$ et $y$ la fonction $\psi$, en notant $t = (u,v)$ et $a(t) = (x(t), y(t))$, on a alors

$$\frac{\partial (f \circ a)}{\partial u}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a(t))\frac{\partial x}{\partial u}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a(t))\frac{\partial y}{\partial u}(t),$$

ce que l'on peut (abusivement) écrire

$$\frac{\partial (f \circ a)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

## 2.5 Recherche d'extrema

**Définition 2.5.1** (extremum global)**.**
Soit $a \in U$.

1. On dit que $a$ est le lieu d'un *maximum global* de $f$ si $\forall u \in U$, $f(u) \leqslant f(a)$.
2. On dit que $a$ est le lieu d'un *minimum global* de $f$ si $\forall u \in U$, $f(u) \geqslant f(a)$.
3. On dit que $a$ est le lieu d'un *extremum global* de $f$ si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum global de $f$.

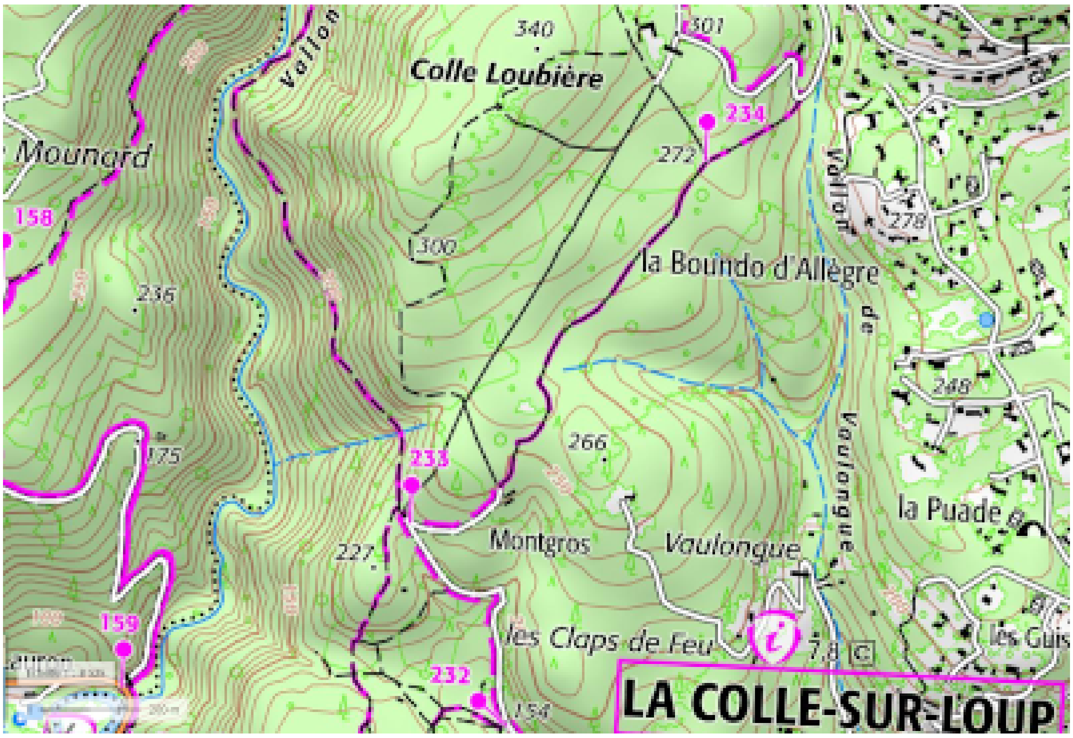


FIGURE 5 – Exemple de carte IGN (source : géoportail).

**Remarque 2.5.2.**
On dit aussi que $f$ admet un maximum global en $a$ (*idem* pour minimum et extremum).

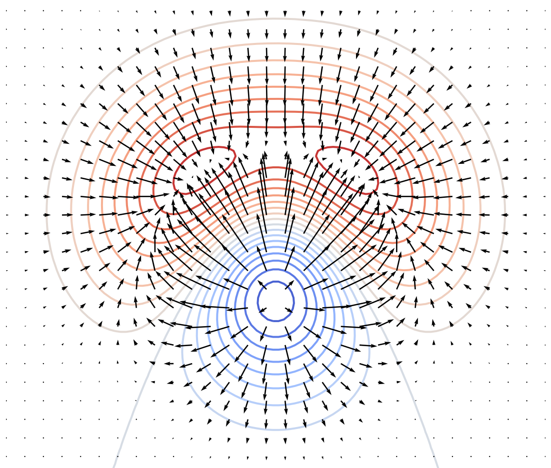

FIGURE 6 – Champ de vecteurs de $\nabla f$, et lignes de niveau de $f$.

**Définition 2.5.3** (extremum local)**.**
Soit $a \in U$.

1. On dit que $a$ est le lieu d'un *maximum local* de $f$ s'il existe $r > 0$ tel que
$$\forall u \in U,\ \|a-u\| \leqslant r \Rightarrow f(u) \leqslant f(a).$$
2. On dit que $a$ est le lieu d'un *minimum local* de $f$ s'il existe $r > 0$ tel que
$$\forall u \in U,\ \|a-u\| \leqslant r \Rightarrow f(u) \geqslant f(a).$$
3. On dit que $a$ est le lieu d'un *extremum local* de $f$ si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum local de $f$.

**Remarque 2.5.4.**
On dit aussi que $f$ admet un maximum local en $a$ (*idem* pour minimum et extremum).

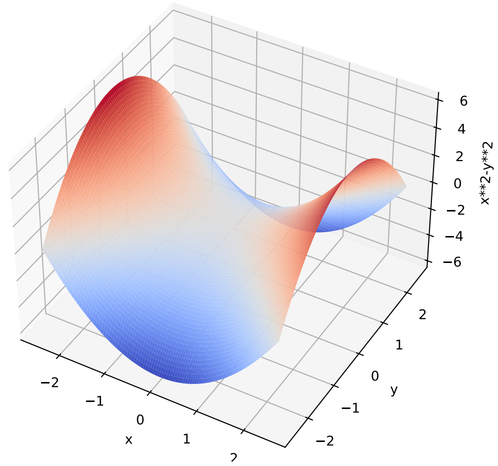


FIGURE 7 – Représentation d'un point selle.

**Remarque 2.5.5.**
Tout extremum global est aussi un extremum local, la réciproque étant bien évidemment fausse.

**Définition 2.5.6** (point critique)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, un *point critique* de $f$ est un point $a \in U$ vérifiant

$$\nabla f(a) = (0, 0).$$

**Théorème 2.5.7** (condition du premier ordre)**.**
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $a \in U$.

Si $f$ admet un extremum local en $a$, alors $a$ est un point critique de $f$.

**Démonstration.**
Notons $a = (x_0, y_0)$. Les deux fonctions partielles de $f$ en $a$ admettent chacune un extremum local en $x_0/y_0$, intérieur à leur ensemble de définition. Elles y admettent donc chacune un point critique, donc les dérivées partielles de $f$ sont nulles en $a$, d'où le résultat. $\square$

**Remarque 2.5.8.**
Il est ici primordial que $U$ soit un ouvert.

Ce théorème ne donne qu'une condition *nécessaire* pour qu'un point soit un extremum local (et *a fortiori* global) d'une fonction.

Cette condition n'est pas suffisante, comme on le peut le voir sur la figure 7.

**Exercice 2.5.9.**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f \ : (x, y) \mapsto x + y - (x^2 + y^2 + ay)$ et $D = \{(x, y) \in ]0, 1[^2 \ , \ x + y < 1\}$.

1. Représenter $D$ dans le plan.
2. Discuter l'existence d'extrema locaux de $f$ sur $D$ en fonction de la valeur de $a$.