# XXIII Dénombrement

2 août 2024

## Table des matières

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.

**Définition 0.0.1.**
On dit que $E$ et $F$ sont *équipotents* s'il existe une bijection de $E$ dans $F$. Dans ce cas, on notera $E \cong F$ (notation non officielle), et si $\varphi$ est une bijection de $E$ dans $F$, on notera $\varphi : E \xrightarrow{\sim} F$.

**Proposition 0.0.2.**
La relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

# 1 Cardinal d'un ensemble fini.

Le programme stipule que parmi les propriétés de la partie 1, les plus intuitives seront admises sans démonstration ; il stipule également que l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

**Définition 1.0.1.**
On dit que $E$ est *fini* s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \cong [\![1, n]\!]$.
Dans le cas contraire, $E$ est dit *infini*.

Le résultat qui donne un sens à ce que l'on appelle intuitivement *le nombre d'éléments d'un ensemble fini* est alors le suivant.

**Théorème 1.0.2.** (i) Soient $n, m$ deux entiers naturels non nuls. Si $[\![1, n]\!] \cong [\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

(ii) Cela assure que si un ensemble est fini et équipotent à $[\![1, n]\!]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors ce $n$ est unique et est appelé le *cardinal* de $E$, et est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$.
Par convention, $\operatorname{Card} \varnothing = 0$.

**Démonstration.**
La démonstration du premier point se fait par récurrence sur $n$ en posant l'hypothèse $(P_n)$ : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, si $[\![1, m]\!] \cong [\![1, n]\!]$, alors $m = n$.
La démonstration est tout à fait du même style que les démonstrations des résultats 1.0.6 et 1.0.7, et est laissée en exercice. □

**Remarque 1.0.3.**
On trouvera parfois la notation $\#E$.

**Exemple 1.0.4.** 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[\![1, n]\!]$ est évidemment fini et de cardinal $n$.

2. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$.
Alors $\operatorname{Card}[\![n, m]\!] = m - n + 1$. En effet, l'application $[\![1, m-n+1]\!] \to [\![n, m]\!]$, $a \mapsto a+n-1$ est une bijection.

**Dans toute la suite on supposera que $E$ est fini de cardinal $n$.**

**Théorème 1.0.5.**
$E$ est équipotent à $F$ si et seulement si ($F$ est aussi fini et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$).

**Démonstration.**
Si $E$ est vide, $F$ aussi.
Sinon, soit $\varphi : [\![1, n]\!] \xrightarrow{\sim} E$, et $\psi : E \xrightarrow{\sim} F$. Alors $\psi \circ \varphi : [\![1, n]\!] \xrightarrow{\sim} F$. □

**Lemme 1.0.6.**
Supposons $E$ non vide, et $a \in E$. Alors $E \backslash \{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$.

**Démonstration.**
Le cas où $E = \{a\}$ est évident. Supposons donc que $E \backslash \{a\}$ est non vide.
Soit $\varphi : [\![1, n]\!] \xrightarrow{\sim} E$.
- Si $\varphi(n) = a$, posons $\psi = \varphi$.
- Si $\varphi(n) = b$ pour $b$ un élément de $E$ différent de $a$, notons $p$ l'antécédent de $a$. Donc $p < n$. Posons alors $\psi = \varphi \circ \tau_{p,n}$, où $\tau_{p,n}$ est la transposition de $S_n$ échangeant $p$ et $n$.

Alors, dans tous les cas, $\psi : [\![1, n]\!] \xrightarrow{\sim} E$, et $\psi(n) = a$.
Ainsi, $\psi|_{[\![1,n-1]\!]} : [\![1, n-1]\!] \xrightarrow{\sim} E \backslash \{a\}$, d'où le résultat. □

**Théorème 1.0.7.**
Soit $A \subset E$. Alors $A$ est fini et $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} E$.
De plus, $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E$ si et seulement si $A = E$.

**Démonstration.**
On le montre par récurrence sur $n = \operatorname{Card} E$.

Si $n = 0$, $E = A = \varnothing$, et le résultat est évident.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout ensemble $E$ de cardinal $n$, et pour tout $A \subset E$, $A$ est fini et $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} E$.

Soit $E$ de cardinal $n+1$, et $A \subset E$. Si $A = E$, alors $A$ est fini et $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E$.

Sinon, soit $a \in E \backslash A$. Posons $\tilde{E} = E \backslash \{a\}$. Alors $\operatorname{Card} \tilde{E} = n$ d'après le lemme précédent, et $A \subset \tilde{E}$. Par hypothèse de récurrence, $A$ est fini, et $\operatorname{Card} A \leqslant n$. En particulier, $\operatorname{Card} A < \operatorname{Card} E$, donc $A \neq E$, ce qui prouve au passage que $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E$ si et seulement si $A = E$. $\square$

**Remarque 1.0.8.**
Grâce à ce résultat, pour montrer l'égalité de deux ensembles finis, on peut montrer la double inclusion, mais aussi se contenter d'une inclusion et montrer l'égalité des cardinaux.

Ce résultat est à rapprocher du résultat assurant que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux si et seulement si l'un est inclus dans l'autre et ils ont même dimension.

**Lemme 1.0.9.**
Soit $f$ une application surjective de $F$ dans $G$. Alors il existe une injection de $G$ dans $F$.

**Démonstration.**
Soit $y \in G$. Alors $y$ a un (ou plusieurs) antécédent(s) par $f$. Choisissons un de ces antécédents, et notons-le $g(y)$. On définit ainsi une application $g : G \to F$, tel que pour tout $y \in G$, $f(g(y)) = y$. Ainsi, $f \circ g$ est injective, et on sait alors que $g$ est injective de $G$ dans $F$. $\square$

**Exercice 1.0.10.**
Montrer que s'il existe une injection $f : F \to G$, alors il existe une surjection $g : G \to F$.

**Théorème 1.0.11.**
Soit $f$ une application de $F$ dans $G$.

(i) Si $G$ est fini et $f$ est injective, alors $F$ est fini également, et $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} G$.

(ii) Si $F$ est fini et $f$ est surjective, alors $G$ est fini également, et $\operatorname{Card} F \geqslant \operatorname{Card} G$.

(iii) Si $F$ et $G$ sont finis et $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} G$, alors :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

**Remarque 1.0.12.**
La relation « $F$ a moins d'éléments que $G$ » correspond donc à « $F$ s'injecte dans $G$ » (au moins pour des ensembles finis).

De même, la relation « $F$ a plus d'éléments que $G$ » correspond donc à « $F$ se surjecte sur $G$ » (au moins pour des ensembles finis).

Concernant des ensembles quelconques, le lecteur intéressé pourra étudier le théorème de Cantor-Bernstein.

**Remarque 1.0.13.**
Une fois encore, ce résultat est à rapprocher des résultats sur les espaces vectoriels et les applications linéaires en dimension finie.

**Démonstration.** (i) $f$ étant injective, elle établit une bijection de $F$ dans $f(F)$. Or $f(F) \subset G$, donc $f(F)$ est fini et $\operatorname{Card} f(F) \leqslant \operatorname{Card} G$. Ainsi, puisque $F \cong f(F)$, $F$ est fini et $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} G$.

(ii) En utilisant 1.0.9, soit $g$ injective de $G$ dans $F$. En appliquant le premier point, $G$ est donc fini et $\operatorname{Card} G \leqslant \operatorname{Card} F$.

(iii) Il suffit de démontrer : $f$ est injective $\Leftrightarrow$ $f$ est surjective, le reste étant alors facile.
Pour le sens direct, si $f$ est injective, $f$ est une bijection de $F$ dans $f(F)$, donc $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} f(F)$. Mais $\operatorname{Card} G = \operatorname{Card} F$, donc $\operatorname{Card} f(F) = \operatorname{Card} G$, et comme $f(F) \subset G$, nous avons $f(F) = G$, ce qui signifie bien que $f$ est surjective.
Pour le sens indirect, soient $x, y \in F$ tels que $f(x) = f(y)$ et $x \neq y$. Alors $f(y) \in f(F \backslash \{y\})$, et donc $f(F \backslash \{y\}) = G$. Par conséquent, $f|_{F \backslash \{y\}}$ est surjective à valeurs dans $G$, donc avec le point (ii), $\operatorname{Card} F \backslash \{y\} \geqslant \operatorname{Card} G$. Mais $\operatorname{Card} F \backslash \{y\} = \operatorname{Card} F - 1 = \operatorname{Card} G - 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $f$ est aussi injective.

$\square$

**Exercice 1.0.14.**
Soient $(G, \star)$ un groupe et $A$ une partie ***finie*** non vide de $G$ stable par $\star$. Soit $x \in A$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to G$ l'application définie par $\varphi(n) = x^n$. Montrer que $\varphi$ n'est pas injective.
2. En déduire que $x^{-1} \in A$, puis que $A$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

**Corollaire 1.0.15** (Principe des tiroirs, ou *Pigeonhole Principle* en anglais)**.**
Si $m < n$, il est impossible de ranger $n$ paires de chaussettes dans $m$ tiroirs sans en mettre au moins deux dans le même tiroir.

**Exercice 1.0.16.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $0 \leqslant i \neq j \leqslant n$ tels que $n \mid (a_i - a_j)$.

**Exercice 1.0.17.**
1. On prend un Rubik's Cube fini sur lequel on effectue la même manipulation encore et toujours. Démontrer que l'on finit par se retrouver avec ce Rubik's Cube de nouveau terminé.[1]
2. Les membres d'une société internationale sont originaires de six pays différents. La liste des membres contient 1978 noms numérotés de 1 à 1978. Montrer qu'il y a un membre dont le numéro vaut la somme des numéros de deux autres membres venant du même pays ou le double du numéro d'un compatriote. [2]

# 2 Dénombrement.

## 2.1 Réunion, intersection et complémentaire.

**Définition 2.1.1.**
Lorsque deux ensembles $A$ et $B$ sont disjoints, la réunion de $A$ et $B$ est appelée *union disjointe* de $A$ et $B$, et est notée $A \sqcup B$.

**Théorème 2.1.2.**
Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

(i) Si $A$ et $B$ sont disjoints, alors $\operatorname{Card}(A \sqcup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$ ;

(ii) $\operatorname{Card}(A \backslash B) = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card}(A \cap B)$ ;

(iii) $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$.

(iv) $\operatorname{Card}\left(\complement_E^A\right) = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$.

**Démonstration.** (i) Soient $m, p$ les cardinaux de $A$ et $B$, et $\varphi : [\![1, m]\!] \xrightarrow{\sim} A$ et $\psi : [\![1, p]\!] \xrightarrow{\sim} B$.
Soit $\chi : \begin{array}{ccl} [\![1, m+p]\!] & \to & A \sqcup B \\ x & \mapsto & \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \leqslant m \\ \psi(x-m) & \text{si } x > m \end{cases} \end{array}$.
Cette application est bien définie et il est facile de voir qu'elle est surjective. De plus, $A$ et $B$ étant disjoints, elle est injective, donc $A \sqcup B \cong [\![1, m+p]\!]$, donc $\operatorname{Card}(A \sqcup B) = m + p = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

(ii) Il suffit d'écrire que $A = (A \cap B) \sqcup (A \backslash B)$ et d'utiliser le premier point.

(iii) Là encore, on remarque que $A \cup B = B \sqcup (A \backslash B)$ et on utilise les deux premiers points.

(iv) Remarquer que $\complement_E^A = E \backslash A$.

□

**Remarque 2.1.3.**
Il existe une formule qui généralise le résultat précédent à la réunion d'une famille finie d'ensembles finis : c'est la *formule de Poincaré*, aussi appelée *formule du crible*. Elle est hors-programme et sera vue en TD.

## 2.2 Produit cartésien.

**Théorème 2.2.1.**
Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et

$$\operatorname{Card}(E \times F) = (\operatorname{Card} E) \times (\operatorname{Card} F).$$

Il existe beaucoup d'analogies entre la dimension d'un espace vectoriel et le cardinal d'un ensemble, mais $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

**Démonstration.**
On note :

$$n = \operatorname{Card} E,\ p = \operatorname{Card} F,$$
$$E = \{ e_1, \cdots, e_n \},\ F = \{ f_1, \cdots, f_p \}.$$

Donc $E \times F = \{ (e_i, f_j),\ i \in [\![1, n]\!],\ j \in [\![1, p]\!] \}$.
Donc en notant $A_i = \{ e_i \} \times F$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$E \times F = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} E \times F &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card} A_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card} F \\ &= n \operatorname{Card} F \\ &= \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F. \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.2.2.**
Ce résultat se généralise facilement par récurrence à un produit de $q$ ensembles finis, $q \in \mathbb{N}^*$ :

$$\operatorname{Card}\left(\prod_{i=1}^{q} E_i\right) = \prod_{i=1}^{q} \operatorname{Card} E_i.$$

**Exercice 2.2.3.**
Combien y a-t'il de possibilités de tirer neuf cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes ?

## 2.3 Applications entre ensembles finis.

**Théorème 2.3.1.**
Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors $F^E$ est fini et

$$\operatorname{Card}\left(F^E\right) = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}.$$

**Démonstration.**
On pose $\varphi : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$, et :

$$\mu : \begin{array}{ccl} F^E & \to & F^n \\ f & \mapsto & (f\circ\varphi(1), \cdots, f\circ\varphi(n)) = (f\circ\varphi(i))_{i\in[\![1,n]\!]} \end{array}$$

$$\nu : \begin{array}{ccl} F^n & \to & F^E \\ (f_1,\cdots,f_n) = (f_i)_{i\in[\![1,n]\!]} & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f_{\varphi^{-1}(x)} \end{array}\right. \end{array}.$$

On vérifie que $\nu\circ\mu = \operatorname{Id}_{F^E}$ et $\mu\circ\nu = \operatorname{Id}_{F^n}$, donc ce sont des bijections. Ainsi $F^E \cong F^n$ et l'on peut conclure avec 1.0.5. □

**Définition 2.3.2.**
Soit $p \in [\![1,n]\!]$. On appelle *$p$-arrangement de $E$* toute injection de $[\![1,p]\!]$ dans $E$. Autrement dit, un $p$-arrangement est une manière de choisir $p$ éléments deux à deux distincts de $E$ **en tenant compte de l'ordre dans lequel on choisit ces éléments** ; c'est donc aussi un $p$-uplet de $E$, ou encore une liste de $p$ éléments de $E$.

**Exemple 2.3.3.**
Si $E = [\![1,5]\!]$ et $p = 2$, les applications $\varphi$ et $\psi$ de $[\![1,2]\!]$ dans $E$ telles que $\varphi(1) = 3$, $\varphi(2) = 5$, $\psi(1) = 5$ et $\psi(2) = 3$, sont deux $p$-arrangements **différents** de $E$.

On peut aussi les identifier aux couples $(3,5)$ et $(5,3)$.

**Théorème 2.3.4.**
Si $\operatorname{Card} E = n$, il y a exactement $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ $p$-arrangements de $E$.

**Démonstration.**
Pour construire une injection $f$ de $[\![1,p]\!]$ dans $E$, il y a $n$ choix possibles pour $f(1)$. Il reste alors $n-1$ choix possibles pour $f(2)$ et ainsi de suite, jusqu'aux $n-p+1$ choix possibles pour $f(p)$ : il y a donc $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)$ injections possibles. □

**Remarque 2.3.5.**
Les arrangements sont utilisés pour modéliser des tirages **successifs** et **sans remise**.

**Exercice 2.3.6.**
Vous jouez « au hasard » au tiercé lors d'une course avec 10 partants : combien avez-vous de chance d'avoir le tiercé dans l'ordre ?

**Corollaire 2.3.7.**
Le groupe $S_n$ des permutations sur $n$ éléments est fini de cardinal $n!$.

**Démonstration.**
$S_n$ correspond à l'ensemble des $n$-arrangements de $[\![1,n]\!]$. □

## 2.4 Parties d'une ensemble fini.

**Définition 2.4.1.**
Soit $p \in [\![0,n]\!]$. On appelle $p$-combinaison de $E$ toute partie de $E$ de cardinal $p$. Autrement dit, une $p$-combinaison est une manière de choisir $p$ éléments distincts de $E$ **sans tenir compte de l'ordre dans lequel on choisit ces éléments**.
On note alors $\dbinom{n}{p}$ le nombre de $p$-combinaisons de $E$ ; ce nombre se lit « $p$ parmi $n$ ».

**Remarque 2.4.2.**
Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages **simultanés**.

**Remarque 2.4.3.**
On étend cette définition à $p \in \mathbb{Z}$ par $\dbinom{n}{p} = 0$ lorsque $p \notin [\![0,n]\!]$.

**Théorème 2.4.4.**
Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

**Remarque 2.4.5.**
Nous venons donc de donner une nouvelle définition du coefficient binomial $\dbinom{n}{p}$, défini en début d'année, et que nous avions interprété comme le nombre de chemin réalisant $p$ succès lors de $n$ répétitions d'une même expérience aléatoire. Remarquons à nouveau qu'il s'agit d'un entier, ce qui n'est absolument pas évident avec la formule du théorème 2.4.4.

**Démonstration.**
Commençons par remarquer qu'ordonner (totalement) un ensemble à $n$ éléments revient à numéroter ses éléments de 1 à $n$. Par conséquent, un ordre sur $E$ peut être vu comme une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $E$, ou encore comme une permutation de $E$. Il y a donc $n!$ façons d'ordonner un ensemble à $n$ éléments.
Ainsi, pour chaque choix de $p$ éléments parmi $n$, il existe $p!$ $p$-arrangements contenant ces $p$-éléments : il y a donc exactement $p!$ fois plus de $p$-arrangements que de $p$-combinaisons. Ainsi, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{1}{p!} \times \dfrac{n!}{(n-p)!}$. □

**Exercice 2.4.6.**
Vous jouez au hasard au tiercé lors d'une course avec 10 partants : combien avez-vous de chance d'avoir le tiercé dans le désordre ?

**Proposition 2.4.7** (Formule du triangle de Pascal)**.**
Si $n \in \mathbb{N}$ et si $p \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$.

**Démonstration.**
On donne ici une preuve combinatoire. Le cas où $p \notin [\![1, n-1]\!]$ est évident. Sinon, soit $E$ de cardinal $n$ et $a \in E$. Notons $F_p$ l'ensemble des parties de $E$ a $p$ éléments, alors

$$F_p = \underbrace{\{A \subset E \mid |A| = p \text{ et } a \in A\}}_{A_p} \sqcup \underbrace{\{A \subset E \mid |A| = p \text{ et } a \notin A\}}_{B_p}.$$

Il est évident *(sinon, détaillez le !)* que $A_p$ est en correspondance bijective avec l'ensemble des parties de $E \setminus \{a\}$ ayant $p-1$ éléments (par $A \mapsto A \setminus \{a\}$) et possède donc $\binom{n-1}{p-1}$ éléments. De même, $B_p$ est en correspondance bijective avec l'ensemble des parties de $E \setminus \{a\}$ ayant $p$ éléments (par $A \mapsto A$) et possède donc $\binom{n-1}{p}$ éléments. Cela permet donc de conclure, car $|F_p| = |A_p| + |B_p|$. □

**Proposition 2.4.8** (Formule du binôme de Newton)**.**
Soit $x$ et $y$ deux éléments d'un anneau $(A, +, \cdot)$ commutant l'un avec l'autre ($xy = yx$), soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

**Démonstration.**
En voici une preuve combinatoire. On montre d'abord aisément par récurrence que toutes les puissances de $x$ et de $y$ commutent. Ensuite, lorsque l'on développe le produit

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ fois}}$$

on obtient des termes qui sont des produits de $k$ facteurs valant $x$, et de $n-k$ facteurs valant $y$, pour $k$ allant de 0 à $n$. Or, pour chacun de ces $k$, il y a $k$ parmi $n$ possibilités d'obtenir un produit de $k$ facteurs valant $x$, et de $n-k$ facteurs valant $y$, d'où le résultat. □

**Théorème 2.4.9.**
Si $E$ est fini, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties l'est aussi et

$$\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}.$$

**Démonstration.**
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, notons $P_i$ l'ensemble des parties de $E$ ayant $i$ éléments. Nous avons alors $\mathscr{P}(E) = \bigsqcup_{i=0}^{n} P_i$. Or chaque $P_i$ est de cardinal $\dbinom{n}{i}$, donc $\mathscr{P}(E)$ est fini et :

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} \mathscr{P}(E) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\ &= (1+1)^n \quad \text{(binôme de Newton)} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

On peut aussi voir qu'il y a une correspondance bijective entre les parties de $E$ et les applications à variables dans $E$ et à valeurs dans $\{0, 1\}$, par $\mathscr{P}(E) \to \{0, 1\}^E$, $A \mapsto \mathbf{1}_A$. □

**Exercice 2.4.10.**
Dans une urne, on place quatre boules rouges (numérotées 1 à 4) et trois boules vertes (numérotées 5 à 7). On réalise trois tirages avec remise, un résultat est le triplet des boules tirées.

Combien y a-t-il de résultats contenant exactement une boule rouge ? Au moins une boule rouge

? Au plus deux boules rouges ? Dont les deux dernières boules sont de couleurs différentes ?

Et si les tirages se font sans remise ?

## Notes

[1]Pour mémoire, il y a plus de $43.10^{12}$ combinaisons possibles sur un Rubik's Cube classique.

[2]L'idée est d'utiliser des différences.
On remarque que $6 \times 329 = 1974$ donc au moins 330 membres viennent d'un même pays. Appelons ce pays $P_1$. Notons $a_1 < a_2 < \cdots < a_{330}$ les numéros des membres de ce pays. Considérons maintenant les 329 différences $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1, \cdots, a_{330} - a_1$. Si l'un de ces nombres est dans $P_1$, nous avons fini.
Sinon, ils sont tous dans l'un des 5 pays restants. On réitère le procédé : au moins 66 de ces nouveaux nombres doivent venir d'un même pays noté $P_2$. On les note $b_1, \cdots, b_{66}$ et on regarde les différences $b_2 - b_1, \cdots, b_{66} - b_1$. Si l'un de ces nombres est le numéro d'un membre de $P_2$, c'est terminé. Mais ces nombres sont de la forme $(a_i - a_1) - (a_j - a_1) = a_i - a_j$, donc si l'un d'eux est dans $P_1$, c'est terminé aussi.
Sinon, au moins 17 viennent de l'un des quatre pays restants, noté $P_3$. On les note $c_1, \cdots, c_{17}$. Si l'un des $c_i - c_1$ est dans $P_1$, $P_2$ ou $P_3$, c'est fini.
Sinon, au moins 6 viennent de l'un des trois pays restants, noté $P_4$. On les note $d_1, \cdots, d_6$. Si l'un des 5 $d_i - d_1$ est dans $P_1$, $P_2$, $P_3$ ou $P_4$, c'est fini.
Sinon, au moins 3 viennent de l'un des deux pays restants, noté $P_5$. On les note $e_1, \cdots, e_3$. Si l'un des 2 $e_i - e_1$ est dans $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ ou $P_5$, c'est fini.
Sinon, les deux sont dans le dernier pays, $P_6$. Et donc leur différence est obligatoirement dans l'un des pays, et voilà.