III Un peu de calcul

2 octobre 2024

Table des matières

1. Le symbole somme : Σ

1.1. Définition d'une somme simple et premières propriétés

Définition 1.1.1.
Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$. Soit $z_m, \dots, z_n$ des nombres complexes. Leur somme est notée

$$\sum_{k=m}^{n} z_k,$$

c'est le nombre complexe que l'on peut noter de manière abusive

$$z_m + z_{m+1} + z_{m+2} + \ldots + z_n.$$

Par convention, si $m > n$, on posera $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} z_k = 0$.

Exemple 1.1.2.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$

Remarque 1.1.3.
Dans une expression du type $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} f(k)$, on dit que la variable k est *muette*. En effet, on peut remplacer la lettre k par un autre nom de variable non encore utilisé, sans changer le sens de l'expression. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} f(k)$, $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} f(i)$ et $\displaystyle\sum_{\text{Brandon}=m}^{n} f(\text{Brandon})$ sont synonymes. Par contre on ne peut pas écrire $\displaystyle\sum_{m=m}^{n} f(m)$, $\displaystyle\sum_{n=m}^{n} f(n)$ ou $\displaystyle\sum_{f=m}^{n} f(f)$, qui n'ont aucun sens.

On essaiera bien entendu de garder des notations cohérentes avec le contexte ... et raisonnables.

Les règles de manipulations vues au collège sont bien entendu valides ici.

Proposition 1.1.4 (Linéarité de la somme)**.**
Soit $a_m, \dots, a_n, b_m, \dots, b_n$ des nombres complexes, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Démonstration.
On le montre par récurrence sur n, après avoir fixé m. □

Proposition 1.1.5 (Relation de Chasles)**.**
Soit $m, n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n \leqslant p$, et $a_m, \dots, a_p$ des nombres complexes. Alors

$$\sum_{k=m}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k.$$

Démonstration.
Ce résultat intuitif peut se démontrer proprement par récurrence sur p : on fixe $m \in \mathbb{Z}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \geqslant m$, on pose (H_p) : « pour tout $n \in [\![m, p]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k$ ». □

Il est important de savoir manipuler des sommes écrites avec le symbole Σ. Pour cela, nous utiliserons principalement les deux outils suivants.

Le premier consiste à observer que la somme

$$z_{m+1} + z_{m+2} + z_{m+3} + \cdots + z_n + z_{n+1}$$

peut s'écrire comme

$$z_{m+1} + z_{(m+1)+1} + z_{(m+2)+1} + \cdots + z_{(n-1)+1} + z_{n+1}.$$

Proposition 1.1.6 (Décalage d'indice)**.**
Soit $n, m \in \mathbb{Z}$, tels que $m \leqslant n$, soit $z_m, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes. On a

$$\sum_{k=m}^{n} z_{k+1} = \sum_{k=m+1}^{n+1} z_k.$$

Démonstration.
On le montre par récurrence sur n, en ayant fixé un entier m.

Si $n = m$, alors

$$\sum_{k=m}^{n} z_{k+1} = z_{m+1} = \sum_{k=m+1}^{n+1} z_k.$$

Soit un entier $n \geqslant m$, supposons que l'identité soit vraie au rang n. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n+1} z_{k+1} &= \left(\sum_{k=m}^{n} z_{k+1}\right) + z_{n+1+1} \\ &= \left(\sum_{k=m+1}^{n+1} z_k\right) + z_{n+2} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n+2} z_k.\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$ et l'on peut conclure par récurrence. □

Exercice 1.1.7.
Soit $n \in \mathbb{N}$, écrire comme une somme partant de l'indice 0 :

$$\sum_{k=2}^{n+1} k^2.$$

Le second outil consiste à remarquer que la somme

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} + z_n$$

peut s'écrire

$$z_{n-0} + z_{n-1} + \cdots + z_{n-(n-1)} + z_{n-n}.$$

Proposition 1.1.8 (Renversement d'indices).
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $z_0, \ldots, z_n$ des nombres complexes. On a

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n} z_{n-k}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_{n-k}.$$

Démonstration.
On montre la première par récurrence sur n.

Si $n = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = z_0 = z_{n-0} = \sum_{k=0}^{n} z_{n-k}.$$

Soit un entier naturel n, supposons que l'identité soit vraie au rang n. Alors, en effectuant un décalage d'indice pour passer de la troisième à la quatrième ligne,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} z_k &= \left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right) + z_{n+1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} z_{n-k}\right) + z_{n+1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} z_{n+1-(k+1)}\right) + z_{n+1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} z_{n+1-k}\right) + z_{n+1-0} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} z_{n+1-k}.\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$ et l'on peut conclure par récurrence.

La seconde identité se déduit immédiatement de celle-là avec un décalage d'indice. □

Exemple 1.1.9.
$$\sum_{i=3}^{6} i^2 = \sum_{i=2}^{5} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{3} (i+3)^2 = \sum_{i=0}^{3} (6-i)^2.$$

Le résultat suivant est fondamental. Savoir repérer une somme télescopique et la simplifier (ou, réciproquement, faire apparaître une somme télescopique à la place de la différence de deux termes) est un *savoir-faire* important.

Théorème 1.1.10 (Simplification téléscopique).
Soit $z_m, \ldots, z_{n+1}$ des nombres complexes. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} (z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} - z_m.$$

Remarque 1.1.11.
Ceci est l'analogue discret du résultat d'intégration $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$, pour les fonctions f éligibles.

Démonstration.
Commencer par écrire la somme « à la main »avec des « petits points » pour voir les simplifications apparaître.

Ensuite, par changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(z_{k+1}-z_k) &= \sum_{k=m}^{n} z_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} z_k\\ &= \sum_{k=m+1}^{n+1} z_k - \sum_{k=m}^{n} z_k\\ &= z_{n+1}-z_m.\end{aligned}$$

□

Remarque 1.1.12.
La dernière égalité se comprend intuitivement, on peut la montrer formellement par récurrence sur n.

Exemple 1.1.13.
Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ en utilisant $1 = k+1-k$.

1.2. Sommes doubles

Définition 1.2.1 (Somme double)**.**
Soit $(z_{k,\ell})_{m\leqslant k\leqslant n, p\leqslant \ell\leqslant q}$ la donnée de $(n+1-m)(q+1-p)$ nombres complexes, que l'on peut représenter dans le tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} z_{m,p} & \dots & z_{m,q}\\ \vdots & & \vdots\\ z_{n,p} & \dots & z_{n,q}\end{pmatrix}.$$

Leur somme est notée

$$\sum_{m\leqslant k\leqslant n,\ p\leqslant \ell\leqslant q} z_{k\ell}.$$

Exemple 1.2.2.
Le nombre $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant 3, 4\leqslant j\leqslant 5} i^2 j$ est la somme des éléments du tableau

$$\begin{pmatrix} 4 & 5\\ 16 & 20\\ 36 & 45\end{pmatrix}$$

et vaut donc 126.

Remarque 1.2.3.
Par décalage d'indice, cette somme vaut $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 2} i^2(3+j)$.

On essaiera toujours d'écrire des sommes partant de 0 ou de 1.

La plus souvent, nous sommerons des nombres sur des tableaux carrés. Dans ce cas, nous utiliserons des notations plus légères.

Définition 1.2.4 (Somme double sur un tableau carré)**.**
Soit $(z_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$ la donnée de n^2 nombres complexes, que l'on peut représenter dans le tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} z_{1,1} & \dots & z_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ z_{n,1} & \dots & z_{n,n}\end{pmatrix}.$$

Leur somme est notée

$$\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} z_{k,\ell}.$$

La somme des éléments de ce tableau situés *au dessus* de sa diagonale, diagonale comprise, est notée

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n} z_{k,\ell}.$$

La somme des éléments de ce tableau situés *strictement au dessus* de sa diagonale, est notée

$$\sum_{1\leqslant k< \ell\leqslant n} z_{k,\ell}.$$

La somme des éléments de ce tableau situés *en dessous* de sa diagonale, diagonale comprise, est notée

$$\sum_{1\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n} z_{k,\ell}.$$

La somme des éléments de ce tableau situés *strictement en dessous* de sa diagonale, est notée

$$\sum_{1\leqslant \ell< k\leqslant n} z_{k,\ell}.$$

Remarque 1.2.5.
Il est important de se rappeler que les coefficients d'indice (i,j) d'un tel tableau :

— sont sur la diagonale si et seulement si $i = j$;

— sont strictement au dessus de la diagonale si et seulement si $i < j$;
— sont strictement au dessous de la diagonale si et seulement si $j < i$.

On pourra par exemple décomposer la somme des éléments d'un tel tableau sur ces trois parties :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} z_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} z_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} z_{i,i} + \sum_{1 \leqslant j<i \leqslant n} z_{i,j}.$$

Théorème 1.2.6 (Sommes doubles et permutation des Σ)**.**
Soit $(z_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de nombres complexes. Alors :

1. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} z_{ij}.$
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} z_{ij}.$
3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} z_{ij}.$

Démonstration.
Cela revient, à chaque fois, à sommer les éléments du tableau ligne par ligne ou colonne par colonne. □

Remarque 1.2.7.
Par convention, une somme vide est nulle. On peut donc écrire :

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} z_{ij}.$$

Exercice 1.2.8.
Combien y a-t-il de cases dans un tableau de dimension $n \times n$?

Retrouver cela en calculant $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 1$.

Faire de même pour un tableau triangulaire.

1.3. Somme d'une famille finie d'objets

Les définitions précédentes peuvent bien entendu se généraliser comme suit.

Définition 1.3.1.
Soit E, I deux ensembles, une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E, indicée par I, est un étiquetage d'éléments de E par les éléments de I. Formellement, c'est une application $e : I \to E$, et l'on note $e_i = e(i)$.

Exemple 1.3.2.
Un n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une famille de réels à n élements, donc indicée par $[\![1, n]\!]$. Cela revient à distribuer n étiquettes (portant les numéros 1 à n) parmi l'ensemble des réels. On remarquera qu'un même nombre peut porter plusieurs étiquettes différentes.

Remarque 1.3.3.
L'intérêt des familles par rapport aux n-uplets est multiple. Il permet d'étiqueter des objets par autre chose que des $[\![1, n]\!]$, et donc de s'affranchir des contraintes d'ordre et de finitude.

Définition 1.3.4.
Soient I un ensemble **fini** et $(z_i)_{i \in I}$ une famille indicée par I d'objets que l'on peut sommer (par exemple : des nombres, des fonctions, des matrices).

La somme des z_i, pour i parcourant l'ensemble I, est notée

$$\sum_{i \in I} z_i$$

Dans le cas où $I = \varnothing$, on convient que

$$\sum_{i \in \varnothing} z_i = 0,$$

cet objet s'entendant comme le nombre zéro, la fonction nulle, la matrice nulle (en fontion du contexte).

Remarque 1.3.5.
Dans le cas où $I = [\![m, n]\!]$, où $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $m \leqslant n$, on la note plus couramment $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} z_k$ ou $\displaystyle\sum_{m \leqslant k \leqslant n} z_k$. Elle vaut $z_m + z_{m+1} + z_{m+2} \dots + z_n$.

Dans le cas où $I = [\![m, n]\!] \times [\![p, q]\!]$ où m, n, p et $q \in \mathbb{Z}$ sont tels que $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$, on la note plus couramment $\displaystyle\sum_{m \leqslant k \leqslant n,\ p \leqslant \ell \leqslant q} z_{k\ell}$.

Remarque 1.3.6.
On pourrait formellement définir ces symboles par récurrence sur le nombre d'objets sommés.

2. Le symbole produit : Π

Le symbole Π est au produit ce que le symbole Σ est à la somme.

Définition 2.0.1.
Soient I un ensemble **fini** et $(z_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I. Le produit des z_i, i parcourant l'ensemble I, est noté $\displaystyle\prod_{i \in I} z_i$.

Par convention, un produit vide vaut 1 :

$$\prod_{i \in \varnothing} z_i = 1$$

Remarque 2.0.2.
On restreindra l'écriture de ce symbole aux familles finies de nombres, ou éventuellement aux fonctions à valeurs numériques.

Nous verrons en effet que le produit matriciel n'est pas commutatif, l'écriture $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} A_i$ n'a dès lors plus grand sens lorsqu'on l'applique à des matrices $A_1, \dots, A_n$.

Définition 2.0.3 (Factorielle)**.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (noté aussi $\mathbb{N}^{\times}$ ou $\mathbb{N}^*$), on appelle *factorielle* n, notée $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple 2.0.4.
Il est bon de connaître les 5 ou 6 premières factorielles : $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ et $6! = 720$.

Les nombres factoriels vérifient la relation de récurrence suivante.

Proposition 2.0.5.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Démonstration.
Immédiat. □

Théorème 2.0.6 (Simplification téléscopique)**.**
Soit $(z_k)_{m \leqslant k \leqslant n+1}$ une famille de nombres complexes non nuls. Alors : $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{z_{n+1}}{z_m}$.

Il y a pour les produits l'exact analogue du théorème 1.2.6 pour les sommes, et la démonstration est elle aussi analogue.

En général on ne peut pas permuter les Σ et les Π. Par exemple, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{2} 1$ et $\displaystyle\prod_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} 1$.

Remarque 2.0.7.

3. Quelques formules à connaître

3.1. Sommes classiques

Théorème 3.1.1.
Soit n un entier naturel. Alors

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration.
Les trois se démontrent facilement par récurrence. Par curiosité et pour s'entraîner, voici deux autres démonstrations :

2. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$. On fait un changement d'indice : $S_n = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$ et on développe : $S_n = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) - S_n$, d'où $2S_n = n(n+1)$.
3. On note $S'_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. On somme tout ça de 0 à n, et on obtient, après simplification téléscopique du membre de gauche : $(n+1)^3 = 3S'_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$. Ça se simplifie pour donner le résultat voulu.

□

Remarque 3.1.2.
On pourrait montrer de la même manière que si $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b$, alors

$$\sum_{k=a}^{b} k = \frac{(b-a+1)(a+b)}{2}$$

On pourra remarquer cette somme correspond bien au nombre de termes de la somme, fois la moyenne du plus petit et du plus grand élément.

On pourrait la calculer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b} k &= \sum_{k=0}^{b-a}(a+k)\\ &= a(b-a+1) + \sum_{k=0}^{b-a} k\\ &= a(b-a+1) + \frac{(b-a)(b-a+1)}{2}\\ &= \frac{(b-a+2a)(b-a+1)}{2}\end{aligned}$$

Il n'est toutefois par nécessaire de retenir cette formule : vous saurez la retrouver au besoin.

3.2. Coefficients binomiaux

Définition 3.2.1 (Coefficients binomiaux)**.**
Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \leqslant n$. On appelle *coefficient binomial*, aussi lu *« k parmi n »*, le réel noté $\binom{n}{k}$ valant $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

On étend cette définition à tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ en posant $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$ ou $k < 0$.

Remarque 3.2.2.
On utilisera souvent :

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{\prod_{j=1}^{k} j} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1}.$$

Théorème 3.2.3 (Formule du triangle de Pascal)**.**
Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration.
Se fait par un calcul direct. □

Remarque 3.2.4.
Cette formule permet de calculer par récurrence tous les coefficients binomiaux, en les représentant par exemple dans le triangle de Pascal.

Corollaire 3.2.5.
Soit $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k}$ est un entier.

Démonstration.
La démonstration se fait par récurrence sur n, avec l'hypothèse : « $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k}$ est un entier », en utilisant la formule de Pascal pour l'hérédité. □

Proposition 3.2.6.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de manières de choisir k éléments dans un ensemble de n éléments.

Si E est un ensemble à n élements, alors E possède exactement $\binom{n}{k}$ parties possédant chacune exactement k éléments.

Démonstration.
Cela sera démontré dans le cours de dénombrement, au second semestre. □

Proposition 3.2.7.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration.
Remarquer que $k = n - (n-k)$! □

Remarque 3.2.8.
Sur un arbre représentant les répétitions d'une même expérience aléatoire, le coefficient binomial k parmi n compte le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions. En particulier, c'est un entier.

La figure 1 illustre le calcul de ces coefficients pour 4 répétitions.

La formule suivante n'est pas exigible mais est fort utile.

Proposition 3.2.9.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < k \leqslant n$, alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Démonstration.
Facile et laissée en exercice. □

3.3. Binôme de Newton, identités remarquables et sommation géométrique

Théorème 3.3.1 (Formule du binôme de Newton)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration.
On le démontre par récurrence sur n, après avoir fixé a et b.

Pour $n = 0$, c'est évident :

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la formule du binôme au rang n. Alors,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\ &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

On écrit alors, avec un décalage d'indice, la première somme

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1-1}a^{k+1}b^{n+1-(k+1)} + a^{n+1} \\ &\qquad = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}\end{aligned}$$

De même, la seconde somme s'écrit :

$$b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}.$$

On a donc, en utilisant la formule du triangle de Pascal,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^k b^{n+1-k} \\ &\qquad + a^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0}b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \\ &\qquad + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

On peut donc conclure par récurrence. □

Corollaire 3.3.2.
Soit $n > 0$. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

Théorème 3.3.3.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$. Alors :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

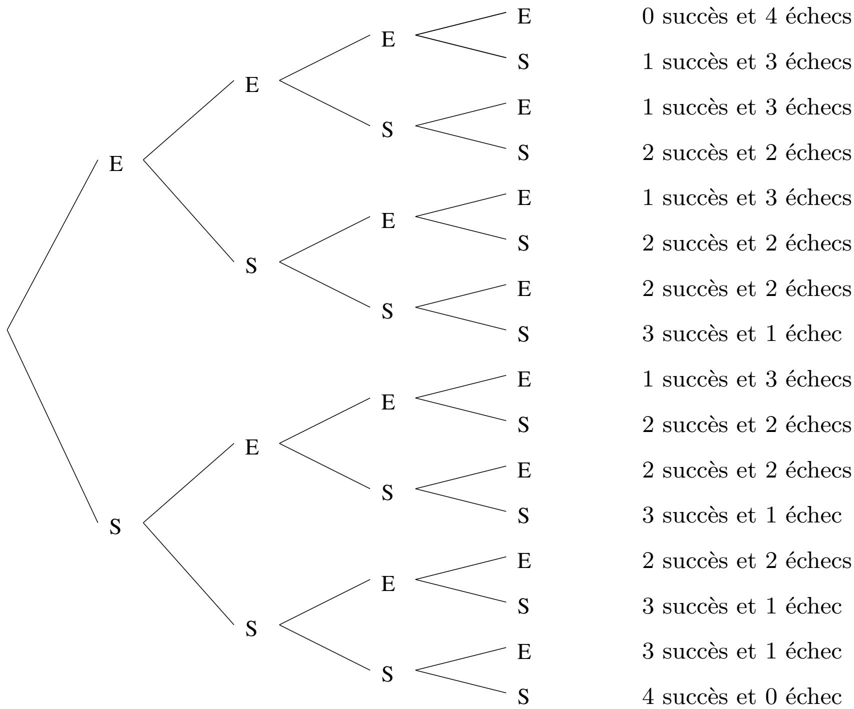

FIGURE 1 – Chemins des succès et échecs pour 4 répétitions d'une expérience

Démonstration.
On développe, il apparaît une simplification téléscopique :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} &= \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^k b^{n-k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\\ &= a^n - b^n\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.3.4 (HP)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, $b \in \mathbb{C}$. Alors,

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^k b^{2n-k}.$$

Démonstration.
$a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}$ et on utilise le théorème précédent. □

Corollaire 3.3.5 (Formule de sommation géométrique)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \begin{cases} \dfrac{z^n-1}{z-1} & \text{si } z \neq 1 \\ n & \text{si } z = 1 \end{cases}.$$

Démonstration.
— Si $z = 1$: on somme n fois 1.
— Sinon, $z^n - 1 = z^n - 1^n = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k 1^{n-1-k} = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

□

Remarque 3.3.6.
Si $p \leqslant n$ sont deux entiers relatifs, et si $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$,

on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} z^k &= z^p \sum_{k=p}^{n} z^{k-p} \\ &= z^p \sum_{k=0}^{n-p} z^k \\ &= z^p \times \frac{z^{n-p+1}-1}{z-1} \\ &= \frac{z^{n+1}-z^p}{z-1}.\end{aligned}$$

La formule de sommation géométrique revient très souvent (c'est la formule que nous utiliserons le plus cette année), mais rarement avec les mêmes indice de début et de fin. Il faut donc être extrêmement vigilant quant à ces deux indices et bien penser à factoriser par le premier terme pour revenir à une somme partant de l'indice zéro.

4. Systèmes linéaires et pivot de Gauss

4.1. Définitions

Définition 4.1.1.
On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues* tout système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ . & & . & & . & & \\ . & & . & & . & & \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les a_{ij} et les b_i sont dans $\mathbb{K}$, et les x_i sont les inconnues.
On dit que le système est *compatible* s'il admet une solution.
Le *système homogène associé* est le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ . & & . & & . & & \\ . & & . & & . & & \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

Dans la suite nous noterons S le premier système et S_H son système homogène associé, et nous noterons Sol et Sol_H leurs ensembles de solutions respectifs.

4.2. Interprétation géométrique

a. Dans le plan

Si $p = 2$, chaque ligne du système s'interprète comme l'équation d'une droite dans le plan. Chaque droite y est en effet représentée par une équation cartésienne. On « sait » de plus que l'intersection de deux droites est

- soit l'ensemble vide (droites parallèles distinctes) ;
- soit une droite (droites confondues) ;
- soit un point (droites non parallèles).

Ainsi, l'ensemble des solutions est soit vide, soit un point, soit représente une droite.

b. Dans l'espace

Si $p = 3$, chaque ligne du système s'interprète comme l'équation d'un plan dans l'espace. Chaque plan y est en effet représenté par une équation cartésienne. On « sait » de plus que l'intersection de deux plans est

- soit l'ensemble vide (plans parallèles distincts) ;
- soit un plan (plans confondus) ;
- soit une droite (plans non parallèles).

De plus, on « sait » que l'intersection d'un plan et d'une droite est

- soit l'ensemble vide (droite parallèle au plan, non incluse dedans) ;
- soit une droite (droite incluse dans le plan) ;
- soit un point (droite non parallèle au plan).

Ainsi, l'ensemble des solutions est soit vide, soit un point, soit représente une droite, soit représente un plan.

4.3. Opérations sur les lignes d'un système

Définition 4.3.1.
On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Si i et j sont deux indices différents compris entre 1 et n, et λ est un scalaire, on note :
- $L_i \leftrightarrow L_j$ l'opération consistant à échanger les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes du système S ;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ l'opération consistant à multiplier par λ la $i^{\text{ème}}$ ligne du système ;
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ l'opération consistant à ajouter la $j^{\text{ème}}$ ligne multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ ligne du système.

Il faut effectuer ces opérations sur toute la ligne du système sans oublier le membre de droite.

Exemple 4.3.2.
Donner des exemples.

Théorème 4.3.3.
- Le système obtenu à partir de S après avoir effectué une opération $L_i \leftrightarrow L_j$ ou une opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est encore équivalent à S.
- **Si** $\lambda \neq 0$, alors le système obtenu à partir de S après avoir effectué une opération $L_i \leftrightarrow \lambda L_i$ est encore équivalent à S.

Démonstration.
Si l'on a effectué $L_i \leftrightarrow L_j$, il suffit de la réeffectuer pour revenir au système de départ.

Si l'on a effectué $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, il suffit d'effectuer $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ pour revenir au système de départ.

Si $\lambda \neq 0$ et si l'on a effectué $L_i \leftrightarrow \lambda L_i$, il suffit d'effectuer $L_i \leftrightarrow \lambda^{-1} L_i$ pour revenir au système de départ. □

4.4. Algorithme du pivot

L'idée du pivot de Gauss pour résoudre un système est de se ramener à un système simple à résoudre, grâce à une succession d'opérations sur les lignes. Ainsi, l'on se ramène d'abord à un système triangulaire (processus d'*élimination*), puis, si cela est possible, à un système diagonal (processus de *remontée*).
Pour étudier d'abord les cas les plus simples et finir par le cas général, étudions ces étapes à rebours.

a. Cas d'un système diagonal

On dit que le système S est *diagonal* si pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Dans ce cas le système se résout de manière immédiate.

Exemple 4.4.1.
Résoudre les systèmes $\left\{\begin{array}{lllll} x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 1 \\ & & z & = & -2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{llll} x & & = & 2 \\ & 0 & = & 1 \\ & z & = & -2 \end{array}\right.$.

On remarque que s'il n'y a aucun zéro sur la diagonale, il y a une unique solution, sinon il n'y a aucune solution, ou une infinité de solutions.

b. Cas d'un système triangulaire inversible

Un cas un peu plus compliqué est celui ou le système est *triangulaire supérieur*, c'est-à-dire lorsque pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
Nous ne traiterons pour l'instant que le cas où le système n'a aucun zéro sur la diagonale : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$. On dit alors que le système est *inversible.*
Le système a donc cette allure :

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{22}x_2 & +\dots & & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \dots & & +\dots & = \dots \\ & & \dots & & +\dots & = \dots \\ & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & & +a_{n-1,n}x_n & = b_{n-1} \\ & & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right.$$

On obtient alors facilement :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

puis

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

et, par récurrence (descendante),

$$\text{pour tout } k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \frac{b_k - \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} a_{k,i}x_i}{a_{k,k}}.$$

Ces relations permettent de calculer les x_k par récurrence.

Nous pouvons également appliquer une succession d'opérations sur les lignes du système pour se ramener de manière équivalente à un système diagonal.
Ce processus est parfois appelé principe de *remontée* car l'on y fait apparaître des zéros dans le haut de la matrice du système, en partant des lignes du bas.
Cette méthode peut être présentée en utilisant une suite de systèmes équivalents.
Il existe une présentation plus visuelle et plus rapide à rédiger. Par exemple, considérons le système

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 2 \\ & -2y & +z & = & 1 \\ & & -z & = & 3 \end{array}\right. .$$

Nous pouvons l'écrire

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Les opérations à effectuer sont alors bien visibles : dans un premier temps, nous allons faire apparaître des zéros dans toute la dernière colonne de la partie de gauche du système, sauf à la dernière ligne. Pour cela, effectuons les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$, et nous obtenons (sans oublier d'effectuer également ces opérations sur la partie de droite du système !)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

ce qui correspond au système

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & & = & -1 \\ & -2y & & = & 4 \\ & & -z & = & 3 \end{array}\right.$$

équivalent au premier. Ensuite, nous effectuons l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2$. Ou plutôt,pour simplifier dès à présent la deuxième ligne et obtenir la valeur de y, nous pouvons effectuer $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$, et ensuite $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

ce qui correspond au système

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & -2 \\ -z & = & 3 \end{array}\right.$$

qui est bien diagonal. Il vient alors directement

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & -2 \\ z & = & -3 \end{array}\right. .$$

Exercice 4.4.2.
Résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & & +4t & = & 2 \\ & -2y & +3z & & = & -1 \\ & & z & -2t & = & 3 \\ & & & -t & = & 1 \end{array}\right. .$$

Exercice 4.4.3.
Résoudre, en fonction de la valeur du paramètre p, le système $\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & & = & 2 \\ & py & +3z & = & -1 \\ & & p(p-1)z & = & 3 \end{array}\right.$.

c. Cas d'un système triangulaire non inversible

S'il y a un zéro sur la diagonale d'un système triangulaire, ce dernier est dit *non inversible*. On obtient un certain nombre de lignes de la forme $0 = c_i$, où les c_i sont des constantes. Si un de ces c_i est non nul, le système n'admet pas de solution, sinon, des lignes se simplifient.
Nous n'évoquerons ce cas que lorsque $p \leqslant 3$ et $n \leqslant 3$.
Les solutions du système s'interprètent simplement en termes géométriques.

• si $p = 2$, l'ensemble des solutions est soit vide, soit un singleton, soit une droite du plan, soit le plan tout entier.

Exemple 4.4.4.
Résoudre les systèmes :

1. $\left\{\begin{array}{rcr} y & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y = 1 \end{cases}$

• si $p = 3$, l'ensemble des solutions est soit vide, soit un singleton, soit une droite de l'espace, soit un plan de l'espace, soit l'espace tout entier.

Exemple 4.4.5.
Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

d. Systèmes échelonnés

Nous généralisons ici le cas précédent, quand la matrice du système n'est pas carrée.

Le système S est dit échelonné de rang $r \in \{0, 1, \ldots, \min(n, p)\}$ s'il est de la forme :

$$\begin{cases} a_{i_1,i_1}x_{i_1} + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots = b_{i_1} \\ \qquad a_{i_2,i_2}x_{i_2} + \quad \ldots \quad \ldots\ldots = b_{i_2} \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad a_{i_r,i_r}x_{i_r} + \ldots = b_{i_r} \end{cases}$$

où $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant p$ et les coefficients $a_{i_1,i_1}, \ldots, a_{i_r,i_r}$ sont tous non nuls.

Chacune des premières lignes s'interprète comme l'équation d'un « hyperplan » de dimension $p-1$ dans $\mathbb{K}^p$. Le système possède une unique solution si et seulement si $r = p$ et une infinité de solutions si et seulement si $r < p$.

Nous n'évoquerons ce cas que lorsque $p \leqslant 3$ et $n \leqslant 3$.
Les solutions du système s'interprètent simplement en termes géométriques.

• si $p = 2$, l'ensemble des solutions est soit vide, soit un singleton, soit une droite du plan, soit le plan tout entier.

Exemple 4.4.6.
Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$

2. $x + y = 1$

• si $p = 3$, l'ensemble des solutions est soit vide, soit un singleton, soit une droite de l'espace, soit un plan de l'espace, soit l'espace tout entier.

Exemple 4.4.7.
Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$

2. $x + y + z = 1$

e. Cas général

Nous allons maintenant voir la méthode d'élimination qui permet de se ramener à un système échelonné.
Dans le système de départ, choisissons une ligne, et une variable. Le but est d'éliminer cette variable dans les autres lignes. Il est donc souvent intéressant de choisir une variable qui apparaît dans un minimum de lignes, comme cela une partie du travail est déjà fait.
Si la variable choisie est x et que la ligne conservée L est de la forme $ax + by + \ldots$ et que l'on veuille éliminer x d'une ligne L' de la forme $cx + dy + \ldots$, il suffit d'effectuer l'opération $L' \leftarrow L' - \frac{c}{a}L$. La ligne L' devient alors $\left(d - \frac{bc}{a}\right) y + \ldots$.
Après avoir éliminé la variable choisie dans toutes les lignes sauf celle conservée, on ne touche plus à cette dernière ligne, et on réitère le procédé avec les lignes restantes, en choisissant une autre variable. On continue jusqu'à ce que le système soit triangulaire ou trivialement sans solution.

Exemple 4.4.8.
Considérons le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$ que l'on écrira sous forme matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$. Puisque y n'apparaît pas dans la dernière ligne, choisissons d'éliminer y dans les deux premières lignes. Afin d'éviter de manipuler des fractions, nous choisissons de conserver la première ligne, car le coefficient devant y y est 1.
Effectuons l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$: le

système est donc équivalent à $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$.
On choisit ensuite d'éliminer z de la seconde ligne en utilisant la dernière ligne, car la variable z y a un coefficient égal à -1. Après l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$, il vient : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$.
Le système obtenu n'a pas l'air très triangulaire ... en fait il l'est si on le réécrit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, ce qui revient à faire des échanges de lignes et de variables dans le dernier système obtenu.
Il vient finalement $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \frac{7}{9} \\ y & = & -\frac{1}{3} \\ z & = & \frac{5}{9} \end{array}\right.$.

Exemple 4.4.9.

Considérons le système $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -2y & +z & = & 2 \\ 2x & +y & -z & = & 1 \\ & 2y & +z & = & 2 \end{array}\right.$.

Codons-le et exécutons l'algorithme du pivot. Il vient successivement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_1 \end{array} \tag{1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \quad \leftarrow \quad L_3 + 3L_4 \tag{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{3}$$

Or les deuxième et troisième lignes sont contradictoires, donc le système n'a pas de solution.