XXIV Applications linéaires

26 mars 2025

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'important est que $\mathbb{K}$ soit un corps, mais le programme se limite à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités.

Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-ev ($\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.1 Définitions.

Définition 1.1.1.
On appelle *application linéaire* (ou *morphisme d'espaces vectoriels*) de E_1 dans E_2 toute application $\varphi : E_1 \to E_2$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in E_1^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \qquad \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y). \quad (1)$$

Autrement dit, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : une application linéaire préserve les combinaisons linéaires.

- L'ensemble des applications linéaires de E_1 dans E_2 est noté $\mathscr{L}(E_1, E_2)$.
- Une application linéaire de E_1 dans E_1 est appelé *endomorphisme*. On note $\mathscr{L}(E_1, E_1) = \mathscr{L}(E_1)$.
- Une application linéaire bijective est appelée *isomorphisme*. L'ensemble des isomorphismes de E_1 dans E_2 est noté $\mathscr{GL}(E_1, E_2)$.
- Un *automorphisme* est un endomorphisme qui est aussi un isomorphisme, on note $\mathscr{GL}(E_1) = \mathscr{GL}(E_1, E_1)$ l'ensemble des automorphismes de E_1, appelé *groupe linéaire*.
- Une application linéaire de E_1 dans $\mathbb{K}$ est une *forme linéaire*.

Remarque 1.1.2.
Une application linéaire φ de E_1 dans E_2 est un morphisme *de groupes* de $(E_1, +)$ dans $(E_2, +)$, avec une propriété supplémentaire vis-à-vis de la loi externe.

Remarque 1.1.3.
La propriété fondamentale des applications linéaires se généralise aux combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs : si $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

De manière plus générale, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ et toute famille à support fini $(\lambda_i)_{i \in I}$, on a

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$$

Remarque 1.1.4 (Très utile en pratique)**.**
La propriété fondamentale des applications linéaires (1) est équivalente à

$$\forall (x,y) \in E_1^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y) \quad (2)$$

ainsi qu'à

$$\forall (x,y) \in E_1^2, \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{et } \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E_1, \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$$

La démonstration est analogue à celle pour les sev.

Exemple 1.1.5.
• Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Alors $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & u \cdot v \end{array}$ est une forme linéaire (on dit que le produit scalaire est linéaire à droite).
• Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \\ B & \mapsto & BA \end{array}$ est linéaire (on dit que le produit matriciel est linéaire à gauche).

Exemple 1.1.6.
$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x+y, 2z, x-y+z) \end{array}$ est un endomorphisme.

Remarque 1.1.7.
Toute application polynomiale (en plusieurs variables) faisant intervenir des termes de degrés différents de 1 n'est pas linéaire.

Exemple 1.1.8.
$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$ n'est pas une application linéaire, idem avec x^2 et $3x + 2y + 2$.

Exemple 1.1.9.
On note $\ell_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes, c'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \ell_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (u_n) & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$ est une forme linéaire.

Exemple 1.1.10.
La dérivation, l'intégration sur un segment sont des opérations linéaires (en fonction de la fonction dérivée, de l'intégrande).

Exemple 1.1.11.
Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.
L'application $\mathrm{ev}_a : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$ est une forme linéaire appelée *évaluation en a*.

Remarque 1.1.12 (Notations multiplicatives)**.**
Dans le cas des endomorphismes, on notera souvent uv pour signifier $u \circ v$.

De même, on notera souvent

$$u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}},$$

où $k \in \mathbb{N}$, avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 1.1.13.
Si $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$, alors $\varphi(0_{E_1}) = 0_{E_2}$.

Démonstration.
Comme pour les morphismes de groupes : $\varphi(0_{E_1}) = \varphi(0_{E_1} + 0_{E_1}) = \varphi(0_{E_1}) + \varphi(0_{E_1})$. □

Montrons enfin un théorème central, qui permet de caractériser bon nombre d'applications linéaires.

Théorème 1.1.14.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, soit E_1, E_2 deux sev supplémentaires de E (*i.e.* $E = E_1 \oplus E_2$).

Soit $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.

Alors, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.

Démonstration.
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$, soit $x \in E$, $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ vérifiant $x = x_1 + x_2$. Alors

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

Synthèse. Soit $x \in E$, soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ vérifiant $x = x_1 + x_2$. On pose $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Tout d'abord, par définition et par linéarité de f_2,

$$f(x_1) = f(x_1 + 0_E) = f_1(x_1) + f_2(0_E) = f_1(x_1).$$

Ainsi, $f_{|E_1} = f_1$. De même, $f_{|E_2} = f_2$.

Vérifions donc la linéarité de f. Soit $x, y \in E$, $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$ vérifiant $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda x + \mu y = \underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in E_2},$$

donc par définition

$$f(\lambda x + \mu y) = f_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + f_2(\lambda x_2 + \mu y_2).$$

Par linéarité de f_1 et de f_2, on a donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \lambda f_1(x_1) + \mu f_1(y_1) + \lambda f_2(x_2) + \mu f_2(y_2) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire. □

Exemple 1.1.15.
Avec $E = F = \mathbb{R}^3$, considérons le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y + z = 0$ et la droite $\mathscr{D} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On montre aisément que $\mathbb{R}^3 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{D}$.

On peut donc considérer l'endomorphisme f de E caractérisé par
- $\forall u \in \mathscr{P}$, $f(u) = u$;
- $\forall u \in \mathscr{D}$, $f(u) = -u$.

1.2 Opérations sur les applications linéaires.

Dans toute la suite, E_1, E_2 et E_3 sont des $\mathbb{K}$-ev.

Théorème 1.2.1.
1. $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ est un sev de $(\mathscr{F}(E_1, E_2), +, \cdot)$.
2. Si $f \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ et $g \in \mathscr{L}(E_2, E_3)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E_1, E_3)$.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$. Alors les applications

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E_2, E_3) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_1, E_3) \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right.$$

et

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E_3, E_1) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_3, E_2) \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array} \right.$$

sont linéaires.

Démonstration.
Élémentaire. □

Remarque 1.2.2.
Ces résultats montrent, avec $E_1 = E_2 = E_3$, que $(\mathscr{L}(E_1), +, \circ)$ est un anneau.

En général, cet anneau n'est pas commutatif.

Exemple 1.2.3.
On pose $E_1 = \mathscr{C}^{+\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: c'est un sev de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (le montrer). On note

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_1 & \to & E_1 \\ f & \mapsto & f' \end{array} \quad \text{et } \psi : \begin{array}{ccc} E_1 & \to & E_1 \\ f & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xf(x) \end{array} \right. \end{array}$$

On constate alors que $\psi \circ \varphi \neq \varphi \circ \psi$.

1.3 Noyau et image.

Théorème 1.3.1.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$, A un sev de E_1 et B un sev de E_2.

1. L'image directe de A par φ est un sev de E_2.
2. L'image réciproque de B par φ est un sev de E_1.

Démonstration.

1. On a bien $\varphi(A) \subset E_2$ ainsi que $0_{E_2} \in \varphi(A)$, car $\varphi(0_{E_1}) = 0_{E_2}$ et $0_{E_1} \in A$.
   Soit $(y_1, y_2) \in \varphi(A)^2$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $(x_1, x_2) \in A^2$ vérifiant $y_1 = \varphi(x_1)$ et $y_2 = \varphi(x_2)$. Alors, comme A est un sev de E_1, on a $x_1 + \lambda x_2 \in A$ et donc, par linéarité de φ, on a $y_1 + \lambda y_2 = \varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_2) = \varphi(x_1 + \lambda x_2) \in \varphi(A)$. Ainsi, $\varphi(A)$ est un sev de E_2.
2. On a bien $\varphi^{-1}(B) \subset E_1$ ainsi que $0_{E_1} \in \varphi^{-1}(B)$, car $\varphi(0_{E_1}) = 0_{E_2}$ et $0_{E_2} \in B$.
   Soit $(x_1, x_2) \in \varphi^{-1}(B)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $\varphi(x_1) \in B$ et $\varphi(x_2) \in B$ et, par linéarité de φ, $\varphi(x_1 + \lambda x_2) = \varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_2) \in B$, car B est un sev de E_2. Ainsi, $x_1 + \lambda x_2 \in \varphi^{-1}(B)$ et donc $\varphi^{-1}(B)$ est un sev de E_1.

□

Proposition 1.3.2.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces-vectoriels, soit V un sev de E, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de V. Alors, $(f(x_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $f(V)$:

$$f\left(\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i \in I}\right)\right) = \mathrm{Vect}\left((f(x_i))_{i \in I}\right)$$

Démonstration.
$f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F. Comme V contient tous les x_i pour $i \in I$, $f(V)$ contient tous les $f(x_i)$ pour $i \in I$. Donc il contient le sous-espace engendré par les $f(x_i)$: $\mathrm{Vect}\left((f(x_i))_{i \in I}\right) \subset f(V)$.

Réciproquement, soit y un élément de $f(V)$. y est l'image d'un élément x de V. Alors x est une combinaison linéaire $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ (où la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$) est à support fini), donc on a

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) \\ &\in \mathrm{Vect}\left((f(x_i))_{i \in I}\right) \end{aligned}$$

Donc $f(V) \subset \mathrm{Vect}\left((f(x_i))_{i \in I}\right)$. □

Exercice 1.3.3.
Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ x + 4y + z \\ y - z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Déterminer une famille génératrice (la plus petite possible) de

$$f\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right).$$

Définition 1.3.4.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$.

1. On appelle *noyau* de φ noté $\mathrm{Ker}\,\varphi$, l'ensemble $\{ x \in E_1 \mid \varphi(x) = 0_{E_2} \}$
2. On appelle *image* de φ et on note $\mathrm{Im}\,\varphi$, l'ensemble $\{ \varphi(x) \mid x \in E_1 \}$.

Remarque 1.3.5.
Le théorème 1.3.1 assure ainsi que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\varphi$ sont des sev.

Remarque 1.3.6.
Pour montrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'ev, on essaiera TOUJOURS de l'identifier comme noyau ou image d'une application linéaire. Sinon, on essaiera de l'identifier directement comme sev. d'un ev. de référence.
Rappel : on ne revient JAMAIS à la définition générale d'un ev.

Théorème 1.3.7.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$.

1. φ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.
2. φ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}\varphi = E_2$.

Démonstration. 1. Deux méthodes : refaire comme la démo analogue pour les morphismes de groupes, ou utiliser directement ce théorème : on choisit la deuxième méthode. Il suffit alors remarquer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est le même que l'on adopte le point de vue «groupe» ou le point de vue «espace vectoriel».
On peut aussi refaire la première méthode pour s'entraîner.

2. Immédiat.

□

Remarque 1.3.8.
Les calculs de noyaux et d'images se ramènent souvent à des résolutions de systèmes linéaires.

Corollaire 1.3.9.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille **génératrice** de E. Alors l'image de cette famille par f est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Notamment, f est surjective si et seulement si $(f(x_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la proposition 1.3.2 :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= f(E) && \text{par définition}\\
&= f\big(\operatorname{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\big) && \text{car } (x_i)_{i\in I} \text{ génératrice}\\
&= \operatorname{Vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right) && \text{par prop. } 1.3.2
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.3.10.
Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + y + z \\ x + 3y + 2z \end{pmatrix}\end{array}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1))\\
&= \operatorname{Vect}((3,2,1),(-1,1,3),(0,1,2))\\
&= \operatorname{Vect}((0,5,10),(-1,1,3),(0,1,2))\\
&= \operatorname{Vect}((-1,1,3),(0,1,2)).
\end{aligned}$$

Exemple 1.3.11.
Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$, avec

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y + 5z \\ - y - z \\ -x + y - 2z \end{pmatrix}\end{array}\right. .$$

Exemple 1.3.12.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' - XP'' \end{array}$. Donner $\operatorname{Im}\varphi$.

Exemple 1.3.13.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^\mathbb{R} \\ f & \mapsto & f \times \sin \end{array}$. On montre que φ est linéaire, puis que φ n'est pas injective, en trouvant une fonction f non nulle dans $\operatorname{Ker}\varphi$. Par exemple $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
On montre enfin que $\psi = \varphi|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})}$ est injective, en montrant que son noyau est réduit à $\{0\}$.

On peut maintenant unifier les résultats sur les structures des solutions de nombreux problèmes linéaires étudiés auparavant (systèmes linéaires, équations différentielles linéaires).

Proposition 1.3.14.
Soit $f \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ et $a \in E_2$. Alors $f^{-1}(\{a\})$ est soit vide, soit un sea de E_1 de direction $\operatorname{Ker} f$.

Remarque 1.3.15.
$f^{-1}(\{a\})$ est l'ensemble des solutions de l'équations $f(x) = a$, avec $x \in E_1$.

Démonstration.
Reprendre chaque preuve effectuée lorsque l'on a rencontré ce type de structure de solution. □

Exemple 1.3.16.
L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n - 4$ est le sea de direction $\mathrm{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, 1)$ et passant par $(4n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.3.17.
On retrouve ainsi que l'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide soit un sea.

1.4 Isomorphismes.

Un isomorphisme transporte la structure d'ev, comme pour les groupes.

Dire que E_1 et E_2 sont isomorphes ne signifie pas que toute application linéaire de E_1 dans E_2 est un isomorphisme. On peut donner un exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, 0)$.

Théorème 1.4.1.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$.

1. Si φ est un isomorphisme, alors φ^{-1} aussi.
2. Une composée d'isomorphismes est un isomorphisme : si $\varphi \in \mathscr{GL}(E_1, E_2)$ et $\psi \in \mathscr{GL}(E_2, E_3)$, alors $\psi \circ \varphi \in \mathscr{GL}(E_1, E_3)$.
3. $(\mathscr{GL}(E_1), \circ)$ est un groupe appelé *groupe linéaire* (groupe des automorphismes).

Démonstration.
1. Soit $(y_1, y_2) \in E_2^2$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $(x_1, x_2) \in E_1^2$ vérifiant $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$ et $x_2 = \varphi^{-1}(y_2)$. On a alors, par linéarité de φ, $\varphi(x_1 + \lambda x_2) = \varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_2) = y_1 + \lambda y_2$, donc $\varphi^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = \varphi^{-1}(y_1) + \lambda\varphi^{-1}(y_2)$. Ainsi, φ^{-1} est linéaire.
2. On a déjà vu que $\psi \circ \varphi$ est bijective et linéaire : c'est fini !
3. Montrons que c'est un sous-groupe du groupe des permutations de E_1 : $(S_{E_1}, \circ)$. L'application identité est bijective et linéaire, donc $\mathrm{Id}_{E_1} \in \mathscr{GL}(E_1)$. Les deux résultats précédents montrent que $\mathscr{GL}(E_1)$ est stable par passage à l'inverse et composition, ce qui permet de conclure.

□

Remarque 1.4.2.
Notation : Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{GL}(\mathbb{K}^n)$ est noté $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 1.4.3.

$$\begin{array}{rccll} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{R}) \\ & (x,y) & \mapsto & (x-y, x+2y) & \end{array}$$

On résout le système $\varphi(x, y) = (a, b)$, et cela montre que φ est bijective, et donne l'expression de φ^{-1}.

Remarque 1.4.4.
$\mathscr{GL}(E)$ ayant une structure de groupe, on utilise les notations multiplicatives usuelles.

Notamment, si u est un automorphisme de E et si $k \in \mathbb{N}$, on note

$$u^{-k} = (u^k)^{-1} = (u^{-1})^k = \underbrace{u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1}}_{k \text{ fois}}.$$

1.5 Image d'une base par une application linéaire.

Théorème 1.5.1.
Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-ev, et soit $(f_i)_{i\in I}$ une base de E_1 et $(g_i)_{i\in I}$ une famille **quelconque** de E_2. Alors il existe une **unique** application linéaire $\varphi : E_1 \to E_2$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(f_i) = g_i$.

Démonstration.
Analyse Soit φ une telle application. Soit $x \in E$. Alors x s'écrit $\sum_{i\in I} \lambda_i f_i$, donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i\in I} \lambda_i \varphi(f_i) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i g_i \end{aligned}$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est la famille des coordonnées de x dans la base $(f_i)_{i\in I}$.

$\varphi(x)$ est donc déterminé de façon unique.

Donc φ est déterminée de façon unique.

Synthèse Considérons l'application qui à tout élément x de E associe $\sum_{i\in I} \lambda_i g_i$, où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est la famille des coordonnées de x dans la base $(f_i)_{i\in I}$.

On montre que φ est une application linéaire. De plus on peut montrer qu'elle vérifie les conditions demandées : $\forall i \in I\ \varphi(f_i) = g_i$.

Conclusion Il existe bien une unique application répondant à la question posée.

□

Proposition 1.5.2.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec f **injective** et $(x_i)_{i \in I}$ une famille **libre** de E. Alors l'image de cette famille par f est libre.

Démonstration.
Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires à support fini tel que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) = 0$$

Alors, par linéarité de f,

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = 0.$$

Or f est injective donc

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

Or $(x_i)_{i \in I}$ est libre, donc pour tout $i \in I$, $\lambda_i = 0$. □

Remarque 1.5.3.
Autrement dit, l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.

Or nous avons vu que l'image d'une famille génératrice par une application linéaire est une famille génératrice de l'image ; on en déduit que l'image d'une base par une application linéaire injective est une base de l'image.

Par ailleurs, l'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective étant une famille génératrice de l'espace d'arrivée, on en déduit que l'image d'une base par un isomorphisme est une base de l'espace d'arrivée.

Proposition 1.5.4.
Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-ev, et soit $(f_i)_{i \in I}$ une base de E_1. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$.

1. φ est injective si et seulement si $(\varphi(f_i))_{i \in I}$ est une famille libre.
2. φ est surjective si et seulement si $(\varphi(f_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de E_2.
3. φ est un isomorphisme si et seulement si $(\varphi(f_i))_{i \in I}$ est une base de E_2.

Démonstration.
On traite le cas où $I = [\![1, n]\!]$.

1. Si φ est injective, par la proposition 1.5.2 la famille $(\varphi(f_i))_{i \in I}$ est libre.
   Réciproquement, si $(\varphi(f_i))_{i \in I}$ est libre, soit $x \in \operatorname{Ker} \varphi$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$.
   Par linéarité de φ, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(f_k) = 0_{E_2}$. Par liberté de la famille $(\varphi(f_i))_{i \in I}$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, donc $x = 0_{E_1}$. Ainsi, $\operatorname{Ker} \varphi = \{0_{E_1}\}$, donc φ est injective.
2. Si φ est surjective, par le corollaire 1.3.9 la famille $(\varphi(f_i))_{i \in I}$ engendre E_2.
   Réciproquement, si $(\varphi(f_i))_{i \in I}$ engendre E_2, $\varphi(E_1) = \varphi(\operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_n)) = \operatorname{Vect}(\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_n)) = E_2$, donc φ est surjective

□

Exemple 1.5.5.
Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= (1, 2) \\ \varphi(X + 1) &= (2, 3) \\ \varphi(X^2 + 1) &= (0, 1) \end{aligned}$$

Cette application linéaire est-elle injective ? Surjective ? Un isomorphisme ?

1.6 Classification en dimension finie.

Proposition 1.6.1.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.
On a $\dim E = n$, donc on peut trouver une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.

Posons alors

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \end{array}.$$

On peut alors remarquer que

1. φ est une application linéaire,
2. φ est injective (car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre),
3. φ est surjective (car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E).

La fonction φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E. E et $\mathbb{K}^n$ sont donc isomorphes. □

Proposition 1.6.2.
Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors l'application qui à un vecteur de E associe le n-uplet de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.
Il suffit de considérer la réciproque de l'isomorphisme φ de la démonstration précédente. $\square$

Proposition 1.6.3.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Supposons que E est de dimension finie.

Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est aussi de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

Démonstration.
Notons tout d'abord n la dimension de E et choisissons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Supposons E et F isomorphes. On peut alors trouver un isomorphisme φ de E sur F. $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est alors une base de F. Donc F est de dimension finie et $\dim F = n = \dim E$.

Réciproquement, supposons que F soit de dimension finie, égale à celle de E. Alors d'après la proposition 1.6.1 E et F sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{K}^n$, donc sont isomorphes. $\square$

Corollaire 1.6.4.
En particulier, tout espace vectoriel E est de dimension finie n si et seulement si E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

2 Applications linéaires en dimension finie.

2.1 Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Proposition 2.1.1.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On considère $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & F^n \\ u & \mapsto & (u(e_k))_{1 \leqslant k \leqslant n} \end{array}$.

Il est aisé de vérifier que φ est linéaire.
En se souvenant que pour toute famille $f_1, \dots, f_n$ de F il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(e_k) = f_k$, on constate que φ est bijective.
Par conséquent $\mathscr{L}(E, F)$ et F^n sont isomorphes, ils ont donc même dimension. Or F^n a pour dimension $n \dim F = \dim E \times \dim F$, d'où le résultat. $\square$

2.2 Rang d'une application linéaire

Définition 2.2.1.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie, on appelle *rang de u* sa dimension :

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)).$$

Lemme 2.2.2.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, soit H un sev de E de dimension finie. Alors, $u(H)$ est de dimension finie et

$$\dim(u(H)) \leqslant \dim(H).$$

Démonstration.
Il suffit de prendre une base de H : son image par u engendre $u(H)$. $\square$

Proposition 2.2.3.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{rg}\, u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Démonstration.
Il suffit de voir que $\mathrm{Im}(u)$ est un sev de F et $\mathrm{Im}(u) = u(E)$. $\square$

Proposition 2.2.4.
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors,

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(v), \mathrm{rg}(u)).$$

Démonstration.
On a

$$\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v),$$

donc $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.

De plus,
$$\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Im}(u)),$$
donc comme $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u)$, on a $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$. □

Théorème 2.2.5 (d'invariance du rang)**.**
Soit E et F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

(i) soit $v \in \mathscr{GL}(F)$, alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u$;

(ii) soit $w \in \mathscr{GL}(E)$, alors $\mathrm{rg}(u \circ w) = \mathrm{rg}\, u$.

Démonstration. (i) Il suffit de remarquer $\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Im}\, u)$. E étant de dimension finie, $\mathrm{Im}\, u$ aussi. Or $v \in \mathscr{GL}(F)$, donc $v(\mathrm{Im}\, u)$ est de dimension finie égale à celle de $\mathrm{Im}\, u$, donc à $\mathrm{rg}\, u$.

(ii) Il suffit de remarquer $\mathrm{Im}(u \circ w) = u(w(E)) = u(E) = \mathrm{Im}\, u$.

□

Remarque 2.2.6.
Pour le point (i) l'injectivité de v suffit, tandis que pour le point (ii), la surjectivité de w suffit.

2.3 Le théorème du rang.

Proposition 2.3.1.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Supposons qu'il existe un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E.

Alors u réalise un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, u$ (ou, si l'on préfère, $u_{|S}^{|\mathrm{Im}\, u} : S \to \mathrm{Im}\, u$ est un isomorphisme).

Démonstration.
Notons φ la restriction de u à S au départ et à $\mathrm{Im}\, u$ à l'arrivée. Il est clair que φ est bien définie et que c'est une application linéaire de S dans $\mathrm{Im}\, u$.

— Montrons que φ est surjective. Soit $y \in \mathrm{Im}\, u$. Montrons qu'il existe $s \in S$ vérifiant $\varphi(s) = y$.

Pour cela, remarquons tout d'abord qu'il existe $x \in E$ vérifiant $u(x) = y$. Comme S et $\mathrm{Ker}\, u$ sont supplémentaires dans E, il existe $s \in S$ et $k \in \mathrm{Ker}\, u$ vérifiant $x = s + k$. On a alors $u(x) = u(s) + u(k) = u(s) + 0$. Donc $\varphi(s) = u(s) = y$.

φ est donc surjective.

— Montrons que φ est injective. Pour cela, il suffit de montrer $\mathrm{Ker}\, \varphi \subset \{ 0 \}$.

Soit $k \in \mathrm{Ker}\, \varphi$. On a $\varphi(k) = 0$, donc $u(k) = 0$, donc $k \in \mathrm{Ker}\, u$. Or $k \in S$, donc $k \in \mathrm{Ker}\, u \cap S$. Or $\mathrm{Ker}\, u$ et S sont supplémentaires, donc $k = 0$.

Ainsi, φ est injective.

Finalement, φ est donc bijective. □

Remarque 2.3.2.
Ce théorème est fondamental pour comprendre comment «fonctionne» une application linéaire. De nombreuses questions (dont des exercices) se résolvent aisément grâce à lui ou grâce aux idées contenues dans sa démonstration.

Théorème 2.3.3 (Théorème du rang)**.**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie et
$$\dim \mathrm{Im}\, u = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, u.$$

Démonstration.
On sait que $\mathrm{Ker}\, u$ possède un supplémentaire S dans E. On a donc $\dim S + \dim \mathrm{Ker}\, u = \dim E$. De plus S et $\mathrm{Im}\, u$ sont isomorphes d'après 2.3.1, donc $\dim S = \dim \mathrm{Im}\, u$. On en déduit immédiatement le résultat. □

Exemple 2.3.4.
• Le rang d'une forme linéaire non nulle vaut 1, celui d'une forme linéaire nulle vaut 0.
• Calculer de deux manières le rang de l'application
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x & -y & & -\,t \\ x & & +z & +\,t \\ x & -y & -z & -2t \end{pmatrix} \end{array}.$$

Corollaire 2.3.5.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors,

(i) u est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}\, u = \dim F$;

(ii) u est injective si et seulement si $\mathrm{rg}\, u = \dim E$.

Corollaire 2.3.6.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{GL}(E)$. Alors, pour tout sous-espace vectoriel F de E, si F est de dimension finie, $u(F)$ l'est également et $\dim u(F) = \dim F$.

Démonstration.
Notons $u_{|F}$ la restriction de u au départ à F. Autrement dit, notons $u_{|F}$ l'application de F dans E, $x \mapsto u(x)$.

Alors $\operatorname{Im} u_{|F}$ est de dimension finie et $\dim \operatorname{Im} u_{|F} = \dim F - \dim \operatorname{Ker} u_{|F}$. Or $\operatorname{Ker} u_{|F} \subset \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et $\operatorname{Im} u_{|F} = u(F)$. On en déduit le résultat. □

Corollaire 2.3.7.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors,

1. si $\dim E < \dim F$, u ne peut être surjective,
2. si $\dim E > \dim F$, u ne peut être injective.

Proposition 2.3.8 (Caractérisation des isomorphismes)**.**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors si φ est un isomorphisme, on a les trois propriétés suivantes :

1. φ est injective,
2. φ est surjective,
3. $\dim E = \dim F$.

Réciproquement, il suffit que deux de ces trois propositions soient vraies pour que u soit un isomorphisme.

Démonstration.
On a déjà montré que si φ était un isomorphisme les trois propositions étaient vraies. Montrons que si deux sont vraies, alors l'autre l'est aussi.

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E - \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

Par ailleurs, on sait que φ est injective si et seulement si son noyau est de dimension 0 et que φ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} \varphi$ est de dimension $\dim F$.

On peut alors remarquer :

— que si les deux premières propriétés sont vraies, alors φ est un isomorphisme ;

— que si φ est injective et $\dim E = \dim F$, alors $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E = \dim F$, donc φ est surjective donc bijective.

— que si φ est surjective et $\dim E = \dim F$, alors $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E - \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E - \dim F = 0$, donc φ est injective donc bijective.

□

Exemple 2.3.9.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires tous distincts et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array}$.
Alors φ est un isomorphisme.
φ est aisément linéaire, et l'égalité $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{K}^{n+1}$ assure qu'il suffit de montrer l'injectivité OU la surjectivité de φ, mais pas les deux.
Il s'agit de faire le bon choix : l'injectivité se démontre sans peine en utilisant qu'un polynôme de degré au plus n ayant $(n+1)$ racines distinctes ne peut être que le polynôme nul. La surjectivité quant à elle peut se démontrer en utilisant les polynômes de Lagrange, ce qui est nettement moins immédiat.

Le résultat précédent s'exprime simplement dans le cas des endomorphismes.

Corollaire 2.3.10 (Éléments inversibles de $\mathscr{L}(E)$)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. φ est injective,
2. φ est surjective,
3. φ est bijective.

Exercice 2.3.11.
Soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{\pm i\}$, soit

$$E = \{\, \mathbb{R} \to \mathbb{K}\ ,\ x \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x))e^{\alpha x} \mid a, b \in \mathbb{K} \,\}.$$

Montrer que $d : f \mapsto f'$ est un automorphisme de E.

Sous quelle forme peut-on donc chercher une primitive de $x \mapsto \cos(x)e^{3x}$?

Corollaire 2.3.12.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit φ un élément de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. φ est inversible à gauche,
2. φ est inversible à droite,
3. φ est inversible.

L'hypothèse de dimension finie est indispensable.
Considérer par exemple les applications

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \\ \psi : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

où $p : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0, \\ n-1 & \text{si} \quad n \neq 0. \end{cases} \end{array}$

Remarque 2.3.13.
De la même manière que le corollaire 2.3.12, on peut montrer que si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$, et si φ est un élément de $\mathscr{L}(E, F)$, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. il existe $\psi \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$,
2. il existe $\chi \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que $\varphi \circ \chi = \mathrm{Id}_F$,
3. φ est bijective.

3 Endomorphismes particuliers.

3.1 Homothéties.

Définition 3.1.1.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle *homothétie de rapport* λ l'application

$$h_\lambda = \lambda \mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

Remarque 3.1.2.
Cas particuliers : $\lambda = 1$: identité ; $\lambda = -1$, symétrie de centre 0.

Théorème 3.1.3.
Toute homothétie est un automorphisme de E, et $(h_\lambda)^{-1} = h_{\lambda^{-1}} = h_{1/\lambda}$.

Démonstration.
• Linéarité : simple.
• Bijectivité et réciproque : calculer $h_\lambda \circ h_{\lambda^{-1}}$ et $h_{\lambda^{-1}} \circ h_\lambda$. □

Proposition 3.1.4.
Soit $\mathscr{H}(E)$ l'ensemble des homothéties de E. Alors $(\mathscr{H}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}(E)$.

Démonstration.
• $\mathscr{H}(E) \subset \mathscr{GL}(E)$ d'après le théorème précédent.
• $\mathrm{Id} \in \mathscr{H}(E)$.
• Stable par passage à l'inverse d'après le théorème précédent.
• et on remarque que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^\star$, $h_\mu \circ h_\lambda = h_{\mu\lambda}$, donc on a la stabilité par produit. □

Remarque 3.1.5.
$\mathscr{GL}(E)$ n'est pas un sous-groupe commutatif, mais $\mathscr{H}(E)$ l'est. En fait il est isomorphe à $\mathbb{K}^\star$ via $\lambda \mapsto h_\lambda$.

3.2 Projecteurs.

Dans toute la suite, on suppose que F et G sont deux sev supplémentaires, *i.e.* $E = F \oplus G$.

Définition 3.2.1.
On appelle *projection* sur F parallèlement à G l'endomorphisme $p_{F\|G}$ de $\mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\forall y \in F,\ \forall z \in G \quad p_{F\|G}(y+z) = y. \qquad (3)$$

Remarque 3.2.2.
Voir le dessin sur la figure 1. Exemple dans $\mathbb{R}^3$ avec $F = \{x = 0\}$ et $G = \{x + y = 0, y + z = 0\}$.

Démonstration.
Il convient de montrer que cette définition est correcte, c'est-à-dire qu'il existe une unique application vérifiant les conditions demandées.

Analyse Soit $p_{F\|G}$ un endomorphisme vérifiant les conditions demandées. Alors pour tout $x \in E$, $p_{F\|G}(x) = y$ où (y, z) est l'unique couple [1] de $F \times G$ tel que $x = y + z$. $p_{F\|G}$ est donc déterminé.

Synthèse Soit $p_{F\|G}$ l'application associant à tout $x \in E$ l'unique valeur [2] y telle que x s'écrive $y+z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

La proposition (3) est manifestement vérifiée. On peut par ailleurs montrer que $p_{F\|G}$ est une application linéaire.

Conclusion Il existe une unique application vérifiant les conditions demandées

□

Remarque 3.2.3.
$p_{F\|G}$ est en fait l'unique endomorphisme de E dont la restriction à F est l'identité et dont la restriction à G est nulle (voir théorème 1.1.14).

Théorème 3.2.4.
$p_{F\|G} \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Ker} p_{F\|G} = G$, $\operatorname{Im}(p_{F\|G}) = F$.

Démonstration.
• Linéarité : élémentaire.
• Soit $x = y + z \in E$, $y \in F$, $z \in G$, donc $x \in \operatorname{Ker} p_{F\|G}$ si et seulement si $y = 0$ si et seulement si $x = z$ si et seulement si $x \in G$.
$x \in \operatorname{Im} p_{F\|G}$ si et seulement si il existe $x' = y' + z'$ tel que $x = y'$ si et seulement si $x \in F$. □

Remarque 3.2.5.
• Cas particuliers : $F = \{0_E\}$ et $G = E$: $p_{F\|G} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
• $G = \{0_E\}$ et $F = E$: $p_{F\|G} = \operatorname{Id}$. Hormis ce dernier cas, une projection n'est jamais injective, ni surjective.
• $p_{F\|G} + p_{G\|F} = \operatorname{Id}$, $p_{F\|G}|_G = 0$, $p_{F\|G}|_F = \operatorname{Id}_F$.
• Si E est de dimension finie, $\operatorname{rg} p_{F\|G} = \dim F$.

Définition 3.2.6.
On appelle *projecteur* tout endomorphisme f tel que $f \circ f = f$.

Théorème 3.2.7.
Toute projection est un projecteur.

Démonstration.
Il s'agit essentiellement d'utiliser que si $x = y + z$ $p_{F\|G}(p_{F\|G}(x)) = p_{F\|G}(y) = p_{F\|G}(y + 0_E) = y$. □

Théorème 3.2.8 (Réciproque)**.**
Soit f un projecteur. Alors $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$, et f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

Démonstration.
Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Alors il existe y tel que $x = f(y)$. Or $f(x) = 0$ mais $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$, donc $x = 0$. $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont donc en somme directe.
Montrons que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.
Analyse : soient $y \in \operatorname{Im} f$ et $z \in \operatorname{Ker} f$ tels que $x = y + z$. Alors il existe u tel que $y = f(u)$. Donc $f(x) = f(f(u)) + f(z) = f(f(u)) = f(u) = y$. Donc on a $y = f(x)$ et donc $z = x - f(x)$.
Synthèse : on pose $y = f(x)$ et $z = x - f(x)$. Alors on a bien $x = y + z$. de plus $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$, donc $y \in \operatorname{Im} f$, et $f(z) = f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$, et ainsi $z \in \operatorname{Ker} f$. On a bien le résultat voulu.
Mais si l'on note $x = y + z$ la décomposition associée à $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$, alors $\forall x$, $f(x) = y$, donc f est bien la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. □

Remarque 3.2.9.
1. Si f est un projecteur, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$: on utilise que $x \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si $f(x) = x$ si et seulement si $f(x) - x = 0_E$ si et seulement si $(f - \operatorname{Id})(x) = 0_E$.
2. Si $E = F \oplus G$, alors $p_{F\|G} + p_{G\|F} = \operatorname{Id}$, et $p_{F\|G} \circ p_{G\|F} = p_{G\|F} \circ p_{F\|G} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En effet, si $x = y + z$, alors $p_{F\|G}(x) = y$ et $p_{G\|F}(x) = z$. Et $p_{F\|G}(z) = p_{G\|F}(y) = 0_E$.

Exercice 3.2.10.
Montrer que l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner l'expression des projections sur l'un de ces deux ensembles parallèlement au second.

3.3 Symétries.

Définition 3.3.1.
On appelle *symétrie par rapport à F et parallèlement à G* l'endomorphisme $s_{F\|G}$ de $\mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\forall y \in F,\ \forall z \in G \quad s_{F\|G}(y + z) = y - z. \qquad (4)$$

1. Il existe et est unique puisque $E = F \oplus G$.
2. Voir remarque précédente.

Démonstration.
Comme pour une projection, on montre que ceci définit bien une fonction, qui est linéaire. □

Remarque 3.3.2.
Voir le dessin sur la figure 1. Même exemple que pour la projection.

Théorème 3.3.3.
$s_{F\|G} \in \mathscr{GL}(E)$, et $s_{F\|G}^2 = \mathrm{Id}_E$, *i.e.* $s_{F\|G} = s_{F\|G}^{-1}$.

Remarque 3.3.4.
On dit que $s_{F\|G}$ est une *involution linéaire.*

Démonstration.
On a déjà observé la linéarité.

Soit $x \in E$, soit $y \in F$ et $z \in G$ vérifiant $x = f + g$. Alors

$$s_{F\|G}(s_{F\|G}(x)) = s_{F\|G}(y - z) = y + z = x.$$

□

Théorème 3.3.5 (Réciproque)**.**
Toute involution linéaire est une symétrie, plus précisément, si f est une involution linéaire, on a :

1. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = E$.
2. f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

Démonstration.
1. • Analyse : si $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$, alors $f(y) = y$ et $f(z) = -z$. Donc $f(x) = y - z$. D'où : $f(x) + x = 2y$ et $x - f(x) = 2z$. Donc $y = \frac{1}{2}(f(x) + x)$ et $z = \frac{1}{2}(x - f(x))$.
   • Synthèse.
2. On vient de voir que si la décomposition de x dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ est $x = y + z$, alors $f(x) = y - z$. CQFD.

□

Remarque 3.3.6.
On peut aussi montrer que $\mathrm{Ker}(s_{F\|G} - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(s_{F\|G} + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s_{F\|G} + \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(s_{F\|G} - \mathrm{Id})$. Montrons la première égalité :
• $x \in \mathrm{Im}(s_{F\|G} + \mathrm{Id}) \Rightarrow x = s_{F\|G}(x') + x'$. Donc $(s_{F\|G} - \mathrm{Id})(x) = s_{F\|G}(s_{F\|G}(x') + x') - s_{F\|G}(x') - x' = x' + s_{F\|G}(x') - s_{F\|G}(x') - x' = 0$.
• $x \in \mathrm{Ker}(s_{F\|G} - \mathrm{Id}) \Rightarrow s_{F\|G}(x) = -x$. On pose alors $x' = (s_{F\|G} - \mathrm{Id})(-1/2x)$. Alors $x' = -\frac{1}{2}(-x - x) = x$, donc $x' = x$, or $x' \in \mathrm{Im}(s_{F\|G} - \mathrm{Id})$.

Remarque 3.3.7.
On peut enfin montrer que $s_{G\|F} + s_{F\|G} = 0_{\mathscr{L}(E)}$, $s_{F\|G} \circ s_{G\|F} = -\mathrm{Id} = s_{G\|F} \circ s_{F\|G}$, et $p_{F\|G} = \frac{1}{2}(s_{F\|G} + \mathrm{Id})$. Faire un dessin.

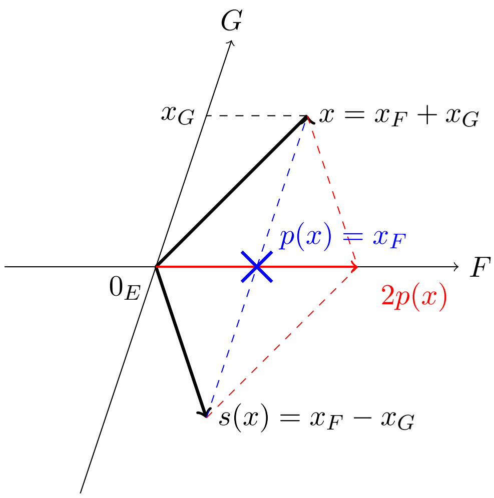

FIGURE 1 – Représentation de la projection et de la symétrie sur F, parallèlement à G.

4 Formes linéaires et hyperplans.

Commençons par un premier résultat déjà croisé :

Proposition 4.0.1 (Expression d'une forme linéaire en dimension finie.)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit φ une forme linéaire sur E.

Soit alors $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, notons $a_j = \varphi(e_j)$.

Soit $u \in E$. Notons $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{E}$.

Alors on a

$$\varphi(u) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j.$$

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j a_j.\end{aligned}$$

□

Définition 4.0.2.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *hyperplan* de E tout sev qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Remarque 4.0.3.
Une forme linéaire non nulle est nécessairement de rang 1. Ainsi, dans un ev E de dimension finie n, un hyperplan est un sev de dimension $n-1$. Nous allons voir plus loin que la réciproque est vraie.

Proposition 4.0.4.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soit H un hyperplan de E. Alors les éléments de H sont les points dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les solutions d'une équation de la forme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, où $a_1, \ldots, a_n$ sont des scalaires fixés non tous nuls.

Réciproquement, toute équation de cette forme est celle d'un hyperplan.

Démonstration.
Soit H un hyperplan de E. Alors par définition il existe une application linéaire φ dont H est le noyau. Or d'après 4.0.1, pour tout élément $x \in E$, la valeur de $\varphi(x)$ (qui est la coordonnée de $\varphi(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}$) s'exprime sous la forme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. $\operatorname{Ker}\varphi$ est donc l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $a_1x_1 + \ldots a_nx_n = 0$.

Réciproquement, pour tout n-uplet de scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ non tous nuls, l'application φ qui à tout vecteur de E de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ associe $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ est une forme linéaire, à l'évidence non nulle (considérer le vecteur de E dont toutes les coordonnées sont nulles, exceptées la i^e, où $i \in [\![1, n]\!]$ est tel que $a_i \neq 0$), les points dont les coordonnées sont solutions de l'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ sont donc les éléments du noyau de $\operatorname{Ker}\varphi$, qui est un hyperplan.

□

Définition 4.0.5.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *droite vectorielle* de E tout sous-espace vectoriel de dimension 1.

Proposition 4.0.6.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un hyperplan de E. Alors toute droite vectorielle D non contenue dans H est supplémentaire de H dans E.

Démonstration.
Soit D une droite vectorielle non contenue dans H, et φ une forme linéaire non nulle dont le noyau est H.
Alors $D \cap H$ est strictement inclus dans D, donc $\dim D \cap H < \dim D = 1$, donc $D \cap H = \{ 0 \}$, et ainsi D et H sont en somme directe.
Enfin, soit $x \in E$. Notons $\lambda = \varphi(x)$. Soit également e un vecteur directeur de D, et $\alpha = \varphi(e)$. Alors $\alpha \neq 0$ car $e \notin H$. Posons alors $h = x - \dfrac{\lambda}{\alpha}e$. Alors $x = h + \dfrac{\lambda}{\alpha}e$, $\dfrac{\lambda}{\alpha}e \in D$, et $\varphi(h) = \lambda - \dfrac{\lambda}{\alpha}.\alpha = 0$, donc $h \in H$. Ceci assure que $E = H + D$, et donc avec le premier point, H et D sont supplémentaires.

□

Étudions la réciproque :

Proposition 4.0.7.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et H un sev admettant une droite D comme supplémentaire. Alors H est un hyperplan de E.

Démonstration.
Soit e un vecteur directeur de D. Tout élément de x de E s'écrit donc de façon unique sous la forme $h + \lambda e$, où $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notons $\varphi(x)$ ce scalaire λ. Alors nous pouvons montrer que φ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Elle est non nulle car $\varphi(e) \neq 0$.

De plus, pour tout $x \in E$, on a $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si x s'écrit sous la forme $h + 0.e$, où $h \in H$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi = H$. □

Remarque 4.0.8.
Ce dernier résultat assure donc la réciproque de

4.0.3 : dans un ev de dimension finie n, les hyperplans sont exactement les sev de dimension $n-1$.

Exemple 4.0.9.
• Les droites vectorielles sont les hyperplans de $\mathbb{R}^2$.
• Les plans vectoriels sont les hyperplans de $\mathbb{R}^3$.
• L'espace est un hyperplan de l'espace-temps.
• $\mathbb{K}_n[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
• $\mathbb{K}^n$ peut être vu comme un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$, si l'on considère que $\mathbb{K}^n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n \times \{0\}$, qui est un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Lemme 4.0.10.
Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E et soit e un vecteur non nul n'appartenant pas à H. Alors pour toute forme linéaire u de noyau H, on a $u = \lambda\varphi$, où $\lambda = u(e)$ et φ est l'application associant α à tout vecteur de la forme $h + \alpha e$.

Démonstration.
Posons $D = \mathrm{Vect}(e)$. L'application φ est bien définie car $E = H \oplus D$ et elle est linéaire. Soit $u \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{Ker}\, u = H$. Alors soit $x \in E$. x s'écrit sous la forme $h+\alpha e$ et on a $u(x) = u(h) + \alpha u(e) = 0 + \alpha\lambda = \lambda\varphi(x)$.

Donc $\forall x \in E u(x) = \lambda\varphi(x)$. Donc $u = \lambda\varphi$. De plus, $\lambda \neq 0$ (sinon $\ker u = E \neq H$). □

Proposition 4.0.11.
Deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

Démonstration.
Direct d'après le lemme précédent. □

Ce résultat implique le suivant :

Proposition 4.0.12. — Soit H un hyperplan, noyau d'une forme linéaire non nulle u. Alors les formes linéaires de noyau H sont exactement les $\lambda.u$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
— Soit H un hyperplan en dimension finie, d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$. Alors les équations de H sont exactement les équations de la forme $\lambda.a_1x_1 + \ldots + \lambda.a_nx_n = 0$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Lemme 4.0.13.
Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie p. Alors $H \cap F$ est de dimension $p-1$ ou p.

Démonstration.
Soit φ une forme linéaire non nulle dont le noyau est H. Alors $H \cap F = \{x \in F \mid \varphi(x) = 0\} = \mathrm{Ker}\, \varphi_{|F}$.

Si $\varphi_{|F}$ est nulle, alors $H \cap F = F$ et le résultat est évident.

Sinon, $\mathrm{Ker}\, \varphi_{|F}$ est un hyperplan de F, donc $\dim H \cap F = p-1$. □

Proposition 4.0.14.
Soit H_1, ..., H_m m hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Alors $\bigcap_{k=1}^{m} H_k$ est de dimension au moins $n-m$.

Réciproquement soit F un sous-espace vectoriel de dimension $n-m$ d'un espace vectoriel E de dimension finie n, où $m \in \mathbb{N}$. Alors F est l'intersection de m hyperplans.

Démonstration.
Le premier point se démontre par une récurrence immédiate en utilisant le lemme 4.0.13.

Pour la réciproque, considérons un supplémentaire S de F dans E. Alors $\dim S = m$. Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de S. Notons p la projection sur S parallèlement à F. Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, notons f_k la forme linéaire qui à $x \in E$ associe la k^{e} coordonnée de $p(x)$.

Soit $x \in E$. On a $x \in F$ si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}\, p$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $f_k(x) = 0$ si et seulement si $x \in \bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\, f_k$. Donc on a

$$F = \bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\, f_k$$

Donc F est l'intersection de m hyperplans. □