

XXIX – Espaces euclidiens et préhilbertiens réels.

1 Produit scalaire, norme et distance.

2 Orthogonalité.

2.1 Premières définitions.

2.2 Familles orthogonales.

2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux.

2.4 Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien.

2.5 Symétries et projecteurs orthogonaux.

2.6 Distance à un sous ev.

2.7 Distance et projection sur un hyperplan

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.

Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.

L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Donner les définitions de produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E et de norme associée à un produit scalaire.
- Énoncer et démontrer les identités de polarisation.
- Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f | g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

- Que peut-on dire d'une famille orthogonale ne comportant pas de vecteur nul ? Le montrer.
- Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Dans quel cas y a-t-il égalité ?
- Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien dont une base orthonormale est $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$. Quelles sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$? Le démontrer.
- Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien dont une base orthonormale est

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $x, y \in E$. Donner et démontrer l'expression du produit scalaire de x et y et de la norme de x en fonction des coordonnées de x et de y dans la base $\mathcal{B}$.

- Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore.
- Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, soit F un sous-espace vectoriel de E . Définir $F^\perp$. Quelles propriétés vérifie-t-il dans tous les cas (sans hypothèses supplémentaires sur F ou E) ? Les démontrer.
- Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E . Montrer que $F \oplus F^\perp = E$ et que $(F^\perp)^\perp = F$.
- Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E . Donner et démontrer l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur x sur F dans une base orthonormale de F .
- Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E . On considère le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de $\mathcal{B}$. Expliquer comment obtenir les deux premiers vecteurs d'une base orthonormale de E par ce procédé, puis généraliser.
- Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E . Définir la distance d'un vecteur x à F . Montrer que le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur y de F vérifiant $\|x - y\| = d(x, F)$.
- Soit E un espace euclidien et u un vecteur non nul de E . Donner et démontrer l'expression du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u)^\perp$, la distance d'un vecteur x de E à $\text{Vect}(u)^\perp$; exprimer cette distance en fonction des coordonnées de u et de x dans une base orthonormale de E .