

XXVIII – Séries numériques.

1 Prolégomènes

2 Séries à termes réels positifs

3 Comparaison série-intégrale

4 Séries absolument convergentes

5 Familles sommables

La notion d'ensemble dénombrable n'est pas au programme de MP2I.

5.1 Familles sommables de réels positifs

5.2 Familles sommables de nombres complexes

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.

Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.

L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Donner les définition de somme partielle, de série convergente, de somme de série et de reste d'une série convergente.
- Montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. La réciproque est-elle vraie ?
- Soit $q \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. Déterminer les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq p} q^n$ et discuter de sa nature. Quand elle converge, déterminer l'expression de sa somme.
- Montrer que la suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
Dans le cas de convergence, que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n)$?
- Énoncer et démontrer le théorème de comparaison (inégalités) pour les séries à termes positif.
- Que peut-on dire des séries de termes généraux positifs u_n et v_n quand $u_n \sim v_n$? Le démontrer.
- Définir ce qu'est une série de Riemann. Donner et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Riemann

converge.

- Montrer que si f est une fonction à valeurs réelles, positive, décroissante et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, alors la suite de terme général $u_n = \left(\sum_{k=0}^n f(k) \right) - \int_0^n f(t) dt$ est convergente.
- Montrer qu'une série absolument convergente est simplement convergente.
- Énoncer et démontrer le théorème des séries alternées (convergence). Donner, sans démonstration, l'inégalité vérifiée par le reste d'indice n .
- Définir la somme d'une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$. Énoncer les propriétés vérifiées par la somme d'une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$ (invariance par permutation, opérations, comparaison, sous-famille, sommation par paquets, théorème de Fubini positif). Donner la définition d'une famille de réels positifs sommable. Donner le lien entre la sommabilité d'une famille de réels positifs indexée par $\mathbb{N}$ et la série associée.
- Donner la définition d'une famille sommable de nombres complexes, de la somme d'une famille sommable de réels, de la somme d'une famille sommable de nombres complexes. Donner le lien entre la sommabilité d'une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}$ et la série associée. Énoncer les propriétés sur la sommabilité et la somme d'une famille sommable de nombres complexes (invariance par permutation, linéarité, argument de comparaison, sommation par paquets, théorème de Fubini).
- Énoncer le théorème du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, et le démontrer.