

XXIX – Déterminants.

1 Groupe symétrique.

1.1 Permutations.

1.2 Permutations particulières.

1.3 Décomposition d'une permutation.

1.4 Signature d'une permutation.

2 Applications multilinéaires.

2.1 Applications multilinéaires symétriques, antisymétriques et alternées.

3 Déterminant d'une famille de vecteurs.

3.1 Définition en dimension finie.

3.2 Interprétation en géométrie réelle.

4 Déterminant d'un endomorphisme.

5 Déterminant d'une matrice carrée.

5.1 Définitions et propriétés.

5.2 Matrices triangulaires et triangulaires par blocs.

5.3 Opérations élémentaires et pivot de Gauss.

5.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.

Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.

L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Savoir, sur un exemple, décomposer une permutation en produits de cycles de supports disjoints et en produit de transpositions, et donner sa signature.
- Donner les définition d'applications multilinéaires, d'applications multilinéaires symétrique, antisymétrique et alternée.
- Montrer qu'une application multilinéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.
- Énoncer le théorème permettant de définir le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Donner l'expression du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base (avec la grosse formule).
- Énoncer et démontrer la formule de changement de bases pour le déterminant d'une famille de vecteurs, dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'une famille de vecteurs est une base de E si et seulement si son déterminant dans une base est non nul.
- Donner la définition du déterminant d'un endomorphisme. Montrer qu'il ne dépend pas de la base choisie.
- Soit u, v deux endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$ -ev E de dimension finie. Montrer que $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$, donner (et prouver) une condition nécessaire et suffisante portant sur $\det(u)$ pour que u soit un automorphisme de E , exprimer dans ce cas $\det(u^{-1})$ en fonction de $\det(u)$.
- Donner la définition du déterminant d'une matrice carrée en fonction de celle de déterminant d'une famille de vecteurs. Donner l'expression du déterminant d'une matrice carrée en fonction de ses coefficients.
- Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de la diagonale.
- Définir le mineur d'ordre (i, j) , le cofacteur d'ordre (i, j) et la comatrice d'une matrice carrée. Donner la formule du développement par rapport à une ligne ou une colonne. Donner un exemple.
- Énoncer et démontrer une formule liant A , $\text{Com}(A)$ et $\det(A)$. En déduire l'expression de l'inverse de A en fonction de $\text{Com}(A)$ et $\det(A)$ lorsque A est inversible.
- Définir le déterminant de Vandermonde et déterminer son expression.