

Semaine 27 du 15 (Sjuin)

XXVI – Matrices et applications linéaires.

1. Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.1. Structure d'espace vectoriel.

1.2. Remarques sur le produit.

1.2a. Colonnes d'un produit.

1.2b. Application canoniquement associée.

1.2c. Produit d'éléments des bases canoniques.

2. Matrices, familles de vecteurs et applications linéaires.

2.1. Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base.

2.2. Matrice associée à une application linéaire relativement à deux bases.

2.3. Matrices de passage.

3. Matrices remarquables.

3.1. Matrices triangulaires.

3.2. Matrices diagonales.

3.3. Matrices symétriques et antisymétriques.

4. Rang d'une matrice.

4.1. Définitions.

4.2. Opérations laissant le rang invariant.

4.3. Calculs pratiques.

4.4. Matrices extraites.

5. Systèmes d'équations linéaires.

5.1. Généralités.

5.2. Solutions.

6. Matrices semblables et trace.

6.1. Matrices semblables.

6.1a. Changement de base pour un endomorphisme.

6.2. Trace d'une matrice carrée.

Définition ; linéarité ; propriété fondamentale de la trace.

Invariance par similitude.

Trace d'un endomorphisme en dimension finie ; propriétés ; trace d'un projecteur.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.

Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.

L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Définir la matrice d'une famille de vecteurs dans une base. Donner un exemple.
- Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives p et n , et de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Définir $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$. Quelles sont ses dimensions ? Soit $x \in E$. Exprimer, avec démonstration, $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x))$ en fonction de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.
- Soit E , F et G trois $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives q , p et n , et de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Exprimer la matrice de $v \circ u$ dans un couple de bases adaptées en fonction de celles de u et de v . Démontrer cette relation.
- Montrer que la matrice d'une application linéaire est inversible si et seulement si cette application linéaire est un isomorphisme.
- Définir ce qu'est une matrice de passage d'une base à une autre. Exprimer une telle matrice de passage comme la matrice d'un endomorphisme de l'espace considéré. Donner les propriétés des matrices de passages.
- Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives n et p . Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Exprimer $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$ en fonction de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ et de matrices de passage.
- Donner la définition du rang d'une matrice. Donner les liens entre les différentes notions de rang.
- Définir la notion de matrices équivalentes, de matrices semblables. Justifier qu'il s'agit de relations d'équivalence. Deux matrices semblables sont-elles équivalentes ? Deux matrices équivalentes sont-elles semblables ?
- Énoncer et démontrer le théorème de réduction d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sous la forme d'une matrice $J_{n,p,r}$, que l'on définira.
- Définir la trace d'une matrice carrée, et donner et démontrer les propriétés de la trace.
- Montrer que deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme exprimées dans des bases différentes.
- Montrer que deux matrices semblables ont même trace.
- Donner la définition de la trace d'un endomorphisme, en dimension finie, et justifier la validité de cette définition. Quelle est la trace d'un projecteur ? Le démontrer.
- Donner la définition d'une matrice triangulaire supérieure. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Que peut-on dire sur la structure de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n ?
- Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et préciser leurs dimensions.