Semaine du 4 mai.

XXV – Probabilités sur un univers fini.

1. Événements, probabilités.

1.1. Expérience aléatoire et univers.

1.1a. Introduction.

1.1b. Univers, événements.

1.1c. Variables aléatoires

1.1d. Système complet d'événements

1.2. Espaces probabilisés finis

1.2a. Définition

1.2b. Probabilité uniforme

1.2c. Propriétés élémentaires.

1.2d. Détermination par les images des événements élémentaires.

1.3. Probabilités conditionnelles.

1.3a. Définition.

1.3b. Probabilités composées, probabilités totales.

1.3c. Formule de Bayes.

1.4. Événements indépendants.

1.4a. Couple d'événements indépendants.

1.4b. Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

2. Variables aléatoires.

2.1. Définitions.

2.2. Loi d'une variable aléatoire.

2.4. Loi usuelles

2.4a. Loi uniforme

2.4b. Loi de Bernoulli.

2.4c. Loi binomiale.

2.5. Couples de variables aléatoires.

2.6. Variables aléatoires indépendantes.

2.7. Espérance.

2.8. Variance, écart type et covariance.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.

Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.

L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

— Donner la définition d'un système complet d'événements. Citer deux systèmes complets d'événements usuels.

— Donner la définition de probabilité sur un univers fini Ω. Donner et démontrer les propriétés élémentaires d'une probabilité (valeurs de $P(\varnothing)$, de $P(A \setminus B)$, de $P(A \cup B)$, de $P(\overline{A})$, comparaison de $P(A)$ et $P(B)$ lorsque $A \subset B$).

— Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini de cardinal n. Montrer que si $p_1, .., p_n$ sont n réels positifs de somme 1, alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_k\}) = p_k$.

— Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles alors $P\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

— Énoncer et démontrer les deux versions de la formule des probabilités totales.

— Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et A, B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. Donner la définition de la probabilité conditionnelle sachant B. Montrer que P_B est une probabilité sur Ω.

— Énoncer la formule des probabilités composées. Énoncer et démontrer les deux versions de la formule de Bayes.

— Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, sur lequel on définit des événements $A, B, A_1, \ldots, A_n$ et des variables aléatoires $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans des ensembles $E, F, E_1, \ldots, E_n$.

Donner les définitions d'indépendance de A et de B, d'indépendance mutuelle de $A_1, \ldots, A_n$, d'indépendance de X et de Y et enfin d'indépendance mutuelle de $X_1, \ldots, X_n$.

— Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements mutuellement indépendants et $B_1, \ldots, B_n$ des événements tels que pour tout $i \in [\![A, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Que peut-on dire de la famille $(B_1, \ldots, B_n)$? Le démontrer.

— Soit X et Y deux variables aléatoires. Montrer que la loi du couple (X, Y) suffit pour déterminer les lois marginales, mais que les lois marginales ne suffisent pas pour déterminer la loi conjointe.

— Définir l'espérance d'une variable aléatoire réelle. Donner la définition d'une variable aléatoire centrée. Donner (sans démontration) une expression de l'espérance en fonction des événements élémentaires. Donner et démontrer les propriétés élémentaires de l'espérance.

— Énoncer et démontrer la formule de transfert.

— Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Que peut-on dire de $\mathrm{E}[XY]$? Le montrer.

— Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi : à valeurs dans $\{-1, 1\}$, $P(X = -1) = P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$. Soit $Z = XY$. Montrer que Z suit la même loi que X, que X et Z sont indépendantes mais que X, Y et Z ne le sont pas mutuellement.

— Définir la variance d'une variable aléatoire réelle X. Énoncer et démontrer la formule de König-Huygens. Soit a et b deux réels, que vaut $V(aX + b)$? Le démontrer.

— Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, sur lequel on définit une variable aléatoire X. Définir «X suit une loi uniforme». Retrouver par le calcul l'espérance et la variance de X dans le cas où X suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

— Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, sur lequel on définit une variable aléatoire X. Définir «X suit une loi de Bernoulli de paramètre p». Donner alors l'espérance et la variance de X (avec démonstration).

— Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, sur lequel on définit une variable aléatoire X. Définir «X suit une loi binomiale de paramètres n et p». Donner alors l'espérance et la variance de X.

— Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

— Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

— Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles, indépendantes deux à deux. Que peut-on dire de $V(X_1 + \cdots + X_n)$? Le démontrer (on commencera par démontrer la formule donnant la variance d'une somme de variables aléatoires).