

Semaine du 27 avril.

XXIV – Applications linéaires.

1 Généralités.

1.1 Définitions.

1.2 Opérations sur les applications linéaires.

1.3 Noyau et image.

1.4 Isomorphismes.

1.5 Image d'une base par une application linéaire.

1.6 Classification en dimension finie.

2 Applications linéaires en dimension finie.

2.1 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

2.2 Rang d'une application linéaire

2.3 Le théorème du rang.

3 Endomorphismes particuliers.

3.1 Homothéties.

3.2 Projecteurs.

3.3 Symétries.

4 Formes linéaires et hyperplans.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.

Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.

L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Donner les définitions d'application linéaire, d'endomorphisme, d'isomorphisme, d'automorphisme et de forme linéaire.
- Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que u est bijective si et seulement si u est injective (resp. surjective).
- Montrer que l'image réciproque d'un sous espace vectoriel par une application linéaire est un sous espace vectoriel.
- Montrer que l'image directe d'un sous espace vectoriel par une application linéaire est un sous espace vectoriel.
- Soit E et F deux \mathbb{K} -ev, soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective, soit (x_1, \dots, x_n) une famille génératrice de vecteurs de E .
Que peut-on dire de la famille $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$? Le démontrer.
- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et (e_1, \dots, e_n) une base de E . Montrer que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
- Soit E et F deux \mathbb{K} -ev, soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ injective, soit (x_1, \dots, x_n) une famille libre de vecteurs de E .

Que peut-on dire de la famille $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$? Le démontrer.

- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F)$, avec E et F de dimensions finies. Montrer que si v est injective, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg } u$.
- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$, avec E et F de dimensions finies. Montrer que si v est surjective, alors $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg } u$.
- Énoncer et démontrer le théorème du rang; on commencera par démontrer que tout supplémentaire du noyau d'une application linéaire u est isomorphe à l'image de u .
- Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que u est bijective si et seulement si u est injective (resp. surjective).
- Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Donner la définition de la projection sur F et parallèlement à G . *Un petit schéma sera le bienvenu.*
- Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Donner la définition de la symétrie par rapport à F et parallèlement à G . *Un petit schéma sera le bienvenu.*
- Soit E un \mathbb{K} -ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = f$. Que peut-on dire sur f ? Le démontrer.
- Soit E un \mathbb{K} -ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = \text{Id}_E$. Que peut-on dire sur f ? Le démontrer.
- Définir ce qu'est un hyperplan. Montrer qu'un sous-espace vectoriel est un hyperplan si et seulement s'il admet une droite vectorielle pour supplémentaire. Donner une caractérisation des hyperplans d'un espace de dimension finie.