Semaine du 20 avril.

XXII – Intégration.

1 Continuité uniforme.

2 Construction de l'intégrale.

Aucun détail sur la construction n'est exigible.

2.1 Fonctions en escalier sur un segment.

Aucun élément de cette partie n'est exigible.

2.2 Fonctions continues par morceaux sur un segment.

2.3 Extension au cas où $b \leqslant a$.

3 Le théorème fondamental du calcul différentiel.

3.1 Primitives.

3.2 Existence de primitives.

4 Méthodes de calcul.

5 Formules de Taylor.

6 Cas des fonctions à valeurs complexes.

7 Approximation d'intégrales.

7.1 Sommes de Riemann.

7.2 La méthode des trapèzes.

Aucun élément de cette partie n'est exigible.

8 Comparaison série-intégrale.

XXIII – Dénombrement.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier, les propriétés les plus intuitives sont admises sans démonstration, et l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

1 Cardinal d'un ensemble fini.

2 Dénombrement.

2.1 Réunion, intersection et complémentaire.

2.2 Produit cartésien.

2.3 Applications entre ensembles finis.

2.4 Parties d'une ensemble fini.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

— Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. Donner les définitions quantifiées de ≪f est continue sur I≫ et de ≪f est uniformément continue sur I≫.
Énoncer le théorème de Heine.

— Montrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

— Énoncer les propriétés fondamentales de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles). Lesquelles restent valables pour une fonction à valeurs complexes ?

— Donner la définition de primitive.

— Énoncer le théorème fondamental du calcul différentiel.

— Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, soit $a \in I$. On définit sur I la fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que le taux d'accroissement de F_a en $x_0 \in I$ tend à droite vers $f(x_0)$ en x_0.

— Énoncer et démontrer le théorème d'intégration par parties.

— Énoncer et démontrer le théorème de changement de variable.

— Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ impaire et $a \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire sur $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$? Le démontrer.

— Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que si f est paire et $a \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_{-a}^{0} f = 2\int_0^a f$.

— Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive. Montrer que s'il existe $x_0 \in [a, b]$ vérifiant $f(x_0) > 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$. *Un dessin sera vivement apprécié.*

— Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

— Énoncer et démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

— Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

— Déterminer l'existence et la valeur de la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$.

— Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer comment encadrer $\displaystyle\int_0^n f$ par deux sommes, en partant d'un encadrement de $\displaystyle\int_k^{k+1} f$.

— Soient E et F deux ensembles finis. Donner le cardinal des ensembles suivants : $E \cup F$; $E \setminus F$; $E \times F$; E^F ; $S(E)$; $\mathscr{P}(E)$.

— Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Que peut-on dire de A ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur le cardinal de A pour que $A = E$ (sans démonstration).

— Soit E et F deux ensembles non vides, F étant fini, soit $f : E \to F$ injective. Que peut-on dire sur E ? Le démontrer.

— Soit E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \to F$ surjective. Montrer qu'il existe une injection de F dans E.
Si E est fini, que peut-on dire sur F ?

— Soit E et F deux ensembles finis non vides tels que $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ et $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

— Soit E et F deux ensembles finis non vides. Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? Le démontrer.

— Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et $k \in [\![0, n]\!]$. Donner (sans démonstration) le nombre de k-arrangements de E. En déduire, en dénombrant les k-arrangements, le nombre de k-combinaisons de E.

— Énoncer la formule du triangle de Pascal et la démontrer de manière combinatoire.

— Soit E un ensemble fini. Quel est le cardinal de $\mathscr{P}(E)$? Le démontrer.