Semaine du 23 mars.

XX – Analyse asymptotique.

1. Comparaison asymptotique de suites.

1.1. Définitions : notations de Landau.

1.2. Opérations.

1.3. Exemples classiques (formulaire).

1.4. Formule de Stirling.

2. Comparaison de fonctions.

2.1. Définitions.

2.1a. o et O.

2.1b. Équivalents.

2.2. Opérations.

2.2a. o et O.

2.2b. Équivalents.

3. Développements limités.

3.1. Définition et premières propriétés.

3.2. Opérations sur les DL.

3.2a. Somme.

3.2b. Produit.

3.2c. Composition.

3.2d. Quotient.

3.3. Intégration et dérivation.

3.4. Formule de Taylor-Young.

3.5. Étude locale d'une fonction.

3.5a. Allure d'une courbe au voisinage d'un point.

3.5b. Prolongement de fonction.

3.5c. Développements asymptotiques.

3.5d. Branche infinie d'une courbe d'équation $y = f(x)$.

XXI – Familles de vecteurs et espaces vectoriels de dimension finie.

4. Familles de vecteurs.

4.1. Familles génératrices.

4.2. Familles libres et liées.

4.3. Bases.

4.4. Bases canoniques.

5. Notion de dimension.

5.1. Définition.

5.2. Théorème fondamental.

5.3. Existence de bases.

5.4. Existence de la dimension.

5.5. Exemples avancés.

6. Sous-espaces vectoriels en dimension finie.

6.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel.

6.2. Existence de supplémentaires.

6.3. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Rappeler les définitions des relations de domination (O), de négligeabilité (o) et d'équivalence ($\sim$) pour des suites. Compléter et démontrer : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = \dots$.
- Montrer que si $u_n \sim v_n$, (u_n) a une limite si et seulement si (v_n) en a une, et dans ce cas les limites sont égales.
- Vrai / Faux (justifier avec une démonstration ou un contre-exemple) :
  1. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
  2. Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v_n)$ alors $u_n + u'_n = o(v_n)$.
  3. Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v'_n)$ alors $u_n + u'_n = o(v_n v'_n)$.
  4. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
  5. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$.
  6. Si $u_n \sim v_n$ alors $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.
  7. Si $u_n \sim v_n$ alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
  8. Si $u_n \sim v_n$ et si (u_n) et (v_n) sont strictement positives alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, ${u_n}^\alpha \sim {v_n}^\alpha$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de a. Donner la définition de « f admet un développement limité à l'ordre n en a ». Donner, en justifiant, le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ et en 0.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner les DL suivants ($\mathrm{DL}_n(0)$ pour DL à l'ordre n en 0) : $\mathrm{DL}_6(0)$ de e^x, $\dfrac{1}{1 \pm x}$, $\ln(1 \pm x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{DL}_3(0)$ $(1+x)^\alpha$, $\tan(x)$.
- Démontrer l'unicité du DL d'une fonction en un point à un certain ordre.
- Montrer que le DL d'une fonction paire ne contient que des puissances paires.
- Montrer qu'une fonction est continue (resp. dérivable) en un point si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 0 (resp. 1).
- Calculer le DL de $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 3.[1]
- Donner le développement limité à l'ordre 3 et au voisinage de 0 de $x \mapsto \exp \sqrt[3]{1+x}$.[2]
- Déterminer le DL à l'ordre 3 et au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x\mathrm{e}^x}$[3]
- Si f admet un DL à l'ordre n en a, que peut-on dire d'une primitive de f ? Et de f' ?
- Donner le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ à un ordre bien choisi, puis en déduire le développement limité de Arctan au voisinage de 0, à l'ordre 8.
- Énoncer et démontrer la formule de Taylor-Young.
- Donner, en le justifiant précisément, le développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ et au voisinage de 0 de exp.
- Soit $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}$, notons $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 ainsi que sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.[4]

1. $1 - x/2 - x^2/8 - x^3/16 + o(x^3)$
2. $e + (ex)/3 - (ex^2)/18 + (5ex^3)/162 + o(x^3)$
3. $1 - x + x^3/2 + o(x^3)$
4. $f(x) = 1 + x/2 + (3x^2)/8 + o(x^2)$

— Soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. Donner les définitions quantifiées de « $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre », de « $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice de E » et de « $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E ».

Si $\mathscr{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E, donner la définition de la famille des coordonnées d'un vecteur de E dans la base $\mathscr{B}$.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si aucun des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ n'est combinaison linéaire des autres.

Soit $x_{n+1} \in E$. Montrer que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre et si $x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ alors $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est libre.

— Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Soit $\mathscr{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ une famille libre de F et $\mathscr{G} = (g_1, \cdots, g_p)$ une famille libre de G. Montrer que si F et G sont en somme directe, alors $\mathscr{F} \uplus \mathscr{G}$ est libre.

— Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts. Montrer que $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre.

— Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, de familles génératrices respectives $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. Donner une famille génératrice de $F + G$, et montrer que c'est bien une famille génératrice.

— Énoncer le théorème de la base incomplète.

— Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, et justifier que cette définition a un sens.

Donner, en justifiant, la dimension des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on dire d'une famille de n vecteurs de E ? Le justifier.

— Donner la définition de rang d'une famille de vecteurs. Quel est le rang maximal d'une famille de p vecteurs ? Que peut-on dire du rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n ?

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E, montrer que F est de dimension finie et que $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

— Montrer qu'un sous espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire.

— Soient deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels F et G de dimension finie. Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F et $(g_1, \ldots, g_p)$ une base de G. Donner la dimension de $F \times G$ en fonction de $\dim F$ et $\dim G$, en déterminant une base de $F \times G$.

— Énoncer et démontrer la formule de Grassman.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Donner une caractérisation (la plus complète possible) des sous-espaces supplémentaires de E.