

Semaine du 9 mars.

XVIII – Fractions rationnelles.

1. Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$.

1.1. Définitions.

1.2. Fonctions rationnelles.

1.3. Dérivées, degrés et pôles.

1.4. Zéros et pôles.

2. Étude locale d'une fraction rationnelle.

2.1. Partie polaire associée à un pôle.

2.2. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

2.3. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

2.4. Quelques méthodes de calcul.

2.4a. Avant même de commencer.

2.4b. Simplification par symétrie, parité et imparité.

2.4c. Simplification par conjugaison de fractions rationnelles réelles.

2.4d. Méthode de base.

2.4e. Résidus.

2.5. Décomposition de P'/P .

3. Application au calcul intégral.

3.1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

3.2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

XIX – Espaces vectoriels.

4. Espaces vectoriels et combinaisons linéaires.

4.1. Définitions.

4.2. Règles de calcul.

4.3. Exemples.

4.4. Combinaisons linéaires.

5. Sous-espaces vectoriels.

5.1. Définitions.

5.2. Exemples.

5.3. Opérations sur les sous-espaces vectoriels.

5.3a. Intersection.

5.3b. Sous-espace vectoriel engendré par une partie.

5.3c. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie.

5.3d. Somme.

5.4. Somme directe et supplémentaires.

6. Translations, sous-espaces affines.

6.1. Translations.

6.2. Sous-espaces affines.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.

Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.

L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Si R et F sont deux fractions rationnelles, quel est le degré de RF ? Le démontrer.
- Si R est une fraction rationnelle, que dire du degré de R' par rapport à celui de R ? Le démontrer.
- Comment définit-on la fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle? Qu'est-ce qu'un pôle d'une fraction rationnelle? un zéro?
- Énoncer le théorème de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle complexe.
- Décomposer $\frac{X^3 - 1}{(X + 1)X^2}$ en éléments simples.
- Donner les écritures littérales des décompositions en éléments simples de

$$R = \frac{X^2 - 3X + 2}{(X - 1)^2(X + 2)^3(X^2 + X + 1)^2}$$

sur $\mathbb{R}$ ainsi que sur $\mathbb{C}$ (on ne calculera pas les coefficients).

- Décomposer $\frac{X - 1}{(X + 1)X^2}$ en éléments simples.
- Décomposer en éléments simples $\frac{X^4 + 1}{X^3 + 3X}$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, que l'on suppose scindé. Donner, en justifiant, la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
- Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x - i)(x - 1)^2}$.
- Donner une primitive **réelle** de $x \mapsto \frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)x}$.

- Donner la définition d'espace vectoriel produit.
- Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Dans chacun des cas suivants, dire si F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , en donnant une démonstration de la réponse :
 - $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $F = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0 \}$.
 - $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0 \}$.
 - $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $F = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est croissante} \}$.
- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que l'intersection de deux sous espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E .
- Soit F et G deux sev. d'un $\mathbb{K}$ -ev. E . Donner la définition de « F et G sont en somme directe » . Quel lien y a-t-il entre cette notion et $F \cap G$? Le démontrer.
- Donner deux définitions équivalentes du sous-espace vectoriel engendré par une partie X d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
- Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace-vectoriel $(E, +, \cdot)$. Rappeler la définition de $F + G$ et montrer que $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.
- Après avoir donné la définition de supplémentaires, montrer que deux sous espace vectoriel F et G d'un $\mathbb{K}$ -ev E sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G .
- Montrer que l'ensemble des fonctions réelles paires, définies sur $\mathbb{R}$, et que l'ensemble des fonctions impaires, définies sur $\mathbb{R}$, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \}$ et $\mathcal{D} = \text{Vect}((1, 0, 0))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
- Soit $\mathcal{F}$ un sous espace affine de direction F , et $a \in \mathcal{F}$. Montrer que $b \in \mathcal{F}$ si et seulement si $b - a \in F$.
- Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous espaces affines d'un espace vectoriel E . Montrer que si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$, alors soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.
- Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous espaces affines d'un espace vectoriel E . Que peut-on dire de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$? Le démontrer.