Semaine du 23 février.

XVII – Dérivabilité.

1 Définitions et premières propriétés.

1.1 Taux d'accroissement.

1.2 Définitions.

1.3 Opérations sur la dérivabilité.

1.4 Dérivées successives.

2 Les grands théorèmes.

2.1 Extremums locaux.

2.2 Le théorème de Rolle.

2.3 Égalité et inégalité des accroissements finis.

2.4 Dérivabilité et sens de variation.

2.5 Limite de la dérivée.

2.6 Théorème des accroissements finis et suites récurrentes.

3 Extension au cas des fonctions complexes.

4 Convexité.

4.2 Fonctions convexes.

4.3 Régularité des fonctions convexes.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en a. Montrer que fg est dérivable en a et donner $(fg)'(a)$.
- Énoncer et démontrer la formule de Leibniz pour les fonctions.
- Énoncer et démontrer la formule de dérivation d'une composée de fonctions.
- Énoncer le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque (vous ferez attention à introduire tous les objets utilisés et à être les plus précis et complets possible).
- Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que g ne s'annule pas. Montrer que f/g est de classe $\mathscr{C}^n$ également.
- Donner un exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, non $\mathscr{C}^1$ (on exprimera sa dérivée).
- Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $a \in \mathring{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Que peut-on dire si f admet un extremum local en a ? Le démontrer.
- Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
- Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
- Donner la définition d'une fonction lipschitzienne. Énoncer les deux versions de l'inégalité des accroissements finis (l'une sans valeurs absolues, et l'autre avec).
- Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
- Soit f définie sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. On suppose f dérivable sur $[a, b] \setminus \{ c \}$ et $\lim\limits_{x \to c^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$. En général, f est-elle dérivable en c ? Donner un exemple.
  De même, si on suppose que f' n'a pas de limite en c, f peut-elle être dérivable en c ? Donner un exemple.
- Donner la définition d'une fonction convexe. Donner (sans démonstration) une caractérisation des fonctions convexes par les fonctions taux d'accroissement, par l'inégalité des trois pentes. Donner (sans démonstration) une caractérisation des fonctions convexes dérivables, des fonctions convexes deux fois dérivables.
- Énoncer et démontrer l'inégalité de Jensen.