Semaine du 26 janvier.

XVI – Polynômes .

1 $\mathbb{K}[X]$: définitions et résultats algébriques.

1.1 Premières définitions.

1.2 Somme et produit.

1.3 Composition.

1.4 Opérations et degré.

1.5 Fonctions polynomiales.

1.6 Division euclidienne.

1.7 L'algorithme de Horner.

2 Décomposition.

2.1 Racines, ordre de multiplicité.

2.2 Nombres de racines.

2.3 Polynômes scindés et relations coefficients-racines.

2.4 Le théorème fondamental de l'algèbre.

2.5 Décomposition en produit de facteurs irréductibles.

3 Dérivation des polynômes.

3.1 Définition.

3.2 Propriétés.

4 Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$.

4.1 PGCD.

4.2 Polynômes premiers entre eux.

4.3 PGCD de n polynômes.

4.4 PPCM.

5 Formule d'interpolation de Lagrange.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

— Pour P et Q deux polynômes, donner l'expression des coefficients de PQ en fonction des coefficients de P et de Q.
— Soit P et Q deux polynômes. Énoncer le plus précisément possible les règles donnant $\deg(P+Q)$, $\deg(PQ)$ et $\deg(P \circ Q)$. Les démontrer.
— Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
— Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$? Le démontrer.
— Montrer que pour P et Q deux polynômes, on a $(P|Q$ et $Q|P) \Leftrightarrow$ (P et Q sont associés).
— Énoncer le théorème de division euclidienne pour des polynômes. Le démontrer.
— Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quel est le reste de la division euclidienne

de P par $(X-\lambda)$? En déduire que $(X-\lambda)|P$ si et seulement si $P(\lambda)=0$.
- Énoncer le théorème de division euclidienne pour des polynômes. Effectuer la division euclidienne de $2X^4-7X^3+6X^2-X-3$ par X^2-3X+1.
- Expliquer l'algorithme de Horner pour évaluer un polynôme.
- Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Donner les deux expressions de P' (avec et sans changement d'indice).
- Donner la définition et deux caractérisations (les plus pertinentes possibles) de « $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine de multiplicité n de $P \in \mathbb{K}[X]$ ». Démontrer la caractérisation utilisant les dérivées du polynôme.
- Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Donner les deux expressions de P' (avec et sans changement d'indice).
- Donner la formule de Taylor pour un polynôme.
- Énoncer le théorème fondamental de l'algèbre (ou théorème de D'Alembert-Gauss).
- Montrer que les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle. Le démontrer.
- Factoriser X^5-1 dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- Donner la formule reliant les coefficients d'un polynôme unitaire scindé à ses racines.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  1. Factoriser X^n-1 par $X-1$ dans $\mathbb{R}[X]$ à l'aide de la formule de sommation géométrique.

  2. Quelles sont les racines complexes du polynôme X^n-1 ? En déduire la factorisation de X^n-1 en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$.

- Énoncer le théorème de Bézout (les deux parties), puis montrer la seconde partie à partir de la première.
- Déterminer le pgcd et une relation de Bezout des polynômes X^3+X^2-2 et X^3+X-2.
- Pour $m \in \mathbb{K}[X]$, on note $\mathscr{D}(m)$ l'ensemble des diviseurs de m. Soit $a,b \in \mathbb{K}[X]$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. Exprimer $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$ en fonction de $a \wedge b$.
- Énoncer et démontrer le lemme de Gauss pour des polynômes.
- Soit a, b_1 et b_2 trois polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que si a est premier avec b_1 et b_2 alors a est premier avec $b_1 b_2$.
- Soient $a_1, \ldots, a_{p+1}$ $p+1$ des polynomes de $\mathbb{K}[X]$.
  Montrer que $a_1 \wedge \ldots \wedge a_p \wedge a_{p+1} = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_p) \wedge a_{p+1}$.
- Pour $m \in \mathbb{K}[X]$, on note $m\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des multiples de m. Soit $a,b \in \mathbb{K}[X]$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. Exprimer $a\mathbb{K}[X] \cap b\mathbb{K}[X]$ en fonction de $a \vee b$.
- Factoriser les polynômes $P = X^5-2X^3+2X^2-3X+2$ et $Q = X^7-X^3$ afin d'en déduire leur PGCD et leur PPCM.
- Énoncer le théorème d'interpolation de Lagrange. On explicitera notamment les polynômes interpolateurs de Lagrange $L_0, \ldots, L_n$.