

Feuille d'exercice n° 29 : **Espaces euclidiens**

Exercice 1 (✎) Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

- 1) $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$
- 2) $\chi(P, Q) = \int_{-1}^1 (P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)) dt$
- 3) $\psi(P, Q) = \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t) dt + P(0)Q(0)$.

Exercice 2 (✎) À deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$\langle P, Q \rangle = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 3 (🚲📐) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \dots, v_n \in E$.

Montrer l'inégalité : $\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 \leq n \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$.

Exercice 4 (✎🚲) Soit $a < b$ deux réels.

- 1) Soient f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt.$$

Étudier le cas d'égalité.

- 2) Soit f une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t) dt \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f^2(t) dt.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 (🚲📐) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer que, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A, B) \rightarrow \text{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire.
- 2) Soit N la norme associée à ce produit scalaire (on l'appelle *norme de Frobenius*), montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B).$$

- 3) Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 6 Soit E un espace euclidien, et (e_1, \dots, e_n) des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$.

- 1) Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une famille orthogonale.
- 2) Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale.

Remarque : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n .

Exercice 7 () \mathbb{R}^3 est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 8

- 1) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.
- 2) Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales.

Exercice 9 () Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer les égalités suivantes.

- 1) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
- 2) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- 3) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Exercice 10 ()

On munit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$. Déterminer F^\perp , avec $F = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Que peut-on en conclure ?

Indication : si $f \in F^\perp$, on pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exercice 11 () On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P, Q) \rightarrow \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0)$?

Exercice 12 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Indication : pour montrer une des implications, avec $k \in \text{Ker } p$ et $i \in \text{Im } p$, on pourra considérer le vecteur $i + \lambda k$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit x et $y \in E$. Montrer les propriétés suivantes.

- 1) Si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H .
- 2) Si $\langle x, y \rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H .
- 3) Les hyperplans trouvés précédemment sont-ils uniques ?

Exercice 14 Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - (ax + b))^2 dx$.

Exercice 15 (🚲) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout couple (P, Q) de E , on associe $\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt$. On appelle k^e polynôme de Tchebychev le polynôme défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_k(\cos \theta) = \cos(k\theta).$$

1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

2) Montrer que les polynômes de Tchebychev P_0, \dots, P_n constituent une base orthogonale de E .

Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.

Exercice 16 Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Montrer que $\forall u \in E, \langle f(u), g(u) \rangle = 0$, puis que $\forall u \in E, \|(f - g)(u)\| = \|(f + g)(u)\|$.

Exercice 17 (📎) Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer les matrices dans la base \mathcal{C} des transformations suivantes.

1) La symétrie et la projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

2) La symétrie et la projection orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $e_1 - 4e_3$.

