

Feuille d'exercice n° 26 : **Matrices et applications linéaires**

Exercice 1 (✎) Soit h l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par rapport à deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1) On prend dans \mathbb{R}^3 la nouvelle base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ définie par :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2.$$

Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?

2) On choisit pour base de \mathbb{R}^2 la nouvelle base $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2)$ définie par :

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2),$$

en conservant la base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 . Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 3 (✎🚲) Soit φ une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de \mathbb{R}^2 . Déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 4 (✎) Soit A une matrice carrée d'ordre 2, et soit φ l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, envoyant M sur AM . Montrer que φ est linéaire et déterminer sa matrice sur la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (✎🚲) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, notée n .

- 1) Soit φ un projecteur de E , peut-on trouver une base dans laquelle la matrice de φ est particulièrement simple ?
- 2) Même question pour une symétrie.

Exercice 6 (✎) Soit φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

- 1) Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 3) Déterminer $\text{Ker}(\varphi - 5\text{Id})$. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(X + 1)$.
- 4) En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 7 (✎)

1) On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

2) Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de f , ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

Exercice 8 (✎🚲) Soit $M = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -22 \\ -6 & 0 & -4 \\ 57 & 11 & 36 \end{pmatrix}$.

- 1) En interprétant M comme étant la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E , montrer qu'il existe une base (I, J, K) telle que cet endomorphisme a dans cette base pour matrice une matrice diagonale avec 1, 2, -2 sur la diagonale.
- 2) Calculer alors M^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- 3) Exprimer en fonction de n les termes u_n, v_n, w_n où u_n, v_n, w_n sont les termes généraux de 3 suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -35u_n - 7v_n - 22w_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 4w_n \\ w_{n+1} = 57u_n + 11v_n + 36w_n \end{cases}, \quad \text{avec } u_0 = v_0 = w_0 = 1.$$

Exercice 9 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Un endomorphisme φ de E est représenté canoniquement par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & c \\ 1 & -2 & d \\ a & b & f \end{pmatrix}$. Déterminer les réels a, b, c, d, f de façon que l'endomorphisme φ vérifie les deux conditions suivantes :

- 1) $\text{Ker } \varphi$ est engendré par le vecteur $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$;
- 2) $\text{Im } \varphi$ est engendré par les deux vecteurs $v = e_2 - 3e_3$ et $w = 3e_1 - 5e_3$.

Exercice 10 (✎) Calculer, s'il existe, l'inverse de chacune des matrices suivantes. Donner le rang de chacune des matrices non inversibles.

$$\begin{array}{lll} \text{1) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{3) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \text{5) } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \text{7) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \text{2) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} & \text{4) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \text{6) } \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 12 () Montrer que la famille $(X^3 + 2X + 1, X^3 - 2X^2 + 2, X^3 - 2X^2 + 1, X^3 + X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ au moyen d'une technique matricielle.

Exercice 13 () Soit a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\text{rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\text{rg}(A) = 2$?

Exercice 14 Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Exercice 15 Calculer les noyaux des matrices suivantes.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad 3) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 16 Déterminer l'inverse des matrices suivantes (si cet inverse existe) :

$$\diamond = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \heartsuit = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \spadesuit = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdot & \cdot & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdot & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \clubsuit = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdot & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 Discuter, selon le paramètre réel m , la dimension des ensembles des solutions des systèmes suivants.

$$1) (\mathcal{S}) : \begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \end{cases} \quad 2) (\mathcal{T}) : \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 18 Soit $M = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 1 & -1 & -1 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est semblable à une matrice particulièrement simple, que l'on déterminera.

Exercice 19 () Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication : on commencera par étudier complètement A .

Exercice 20 Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(BA).$$

Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

Exercice 21 (🚲) On considère une suite de variables aléatoires (T_n) à valeurs dans $\{x, y, z\}$, définie par le graphe de transition suivant. Par exemple, l'arête du bas signifie que $\forall n \in \mathbb{N}, P(T_{n+1} = x | T_n = z) = \frac{3}{10}$.

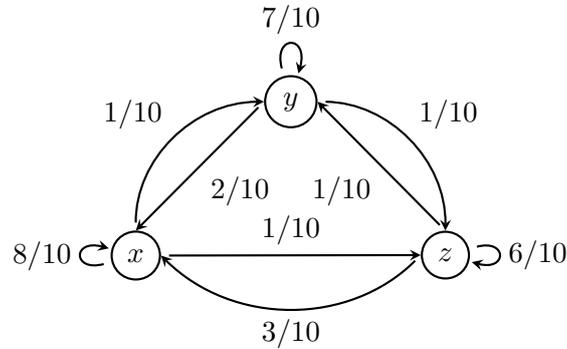


FIGURE 1 – Graphe de transition pour la suite (T_n) .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_n = P(T_n = x), \quad y_n = P(T_n = y), \quad z_n = P(T_n = z) \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
- 2) On note φ l'endomorphisme canoniquement associé à A . Déterminer les droites vectorielles de \mathbb{R}^3 stables par φ . En déduire une base relativement à laquelle la matrice de φ est diagonale.
- 3) La suite (X_n) converge-t-elle ? Que peut-on dire de sa limite ?
- 4) Déterminer l'expression de X_n en fonction de n .

