

Feuille d'exercice n° 24 : **Applications linéaires**

**Exercice 1** (✎) Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires.

- 1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2$
- 2)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x - 3$
- 3)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2}$
- 4)  $\varphi : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(3/4)$
- 5)  $\chi : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto -\int_{1/2}^1 f(t) dt$
- 6)  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
- 7)  $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$
- 8)  $\rho : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f \mapsto \left( x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t) dt \right)$

**Exercice 2** (✎) Calculer le noyau et l'image de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3** Pour chaque propriété suivante, donner un exemple d'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  la vérifiant.

- 1)  $\text{Ker}(f)$  est inclus strictement dans  $\text{Im}(f)$ .
- 2)  $\text{Im}(f)$  est inclus strictement dans  $\text{Ker}(f)$ .
- 3)  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ .
- 4)  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.

**Exercice 4** (✎🚲) Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- 1) Montrer que  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$  et  $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ .
- 2) Montrer que  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ .
- 3) Montrer que  $E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f$ .

**Exercice 5** (✎🚲)

- 1) Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Établir l'équivalence

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g.$$

- 2) Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , vérifiant  $f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
  - a) Montrer que  $(f - \text{Id}_E) \circ (f + 2\text{Id}_E) = (f + 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
  - b) En déduire que  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ .
  - c) Montrer que  $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ .

**Exercice 6** (🚲) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

**Exercice 7** (✎)

- 1) Montrer que l'application  $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$  est un isomorphisme.  

$$P \mapsto (P(0), P')$$
- 2) En déduire que  $\mathbb{K}[X]$  n'est pas de dimension finie.

**Exercice 8** (✎) Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même.

- 1) Montrer que, si  $F \subset f(F)$  alors  $f(F) = F$ .
- 2) Montrer que, si  $f$  est injective et  $f(F) \subset F$  alors  $f(F) = F$ .

**Exercice 9** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.

- 1)  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$
- 2)  $\text{Im } f = \text{Im } f^2$
- 3)  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$

**Exercice 10** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, soit  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $E = \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$ . Montrer que ces sommes sont directes.

**Exercice 11** (✎) Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- 1) Montrer que  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ .
- 2) En déduire que  $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$ .

**Exercice 12 – Suite exacte d'applications linéaires –**

Soient  $E_0, E_1, \dots, E_n$   $n+1$  espaces vectoriels sur un même corps commutatif  $\mathbb{K}$ , de dimensions respectives  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . On suppose qu'il existe  $n$  applications linéaires  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  telles que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f_k \in \mathcal{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

- $f_0$  est injective;
- $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \text{Im } f_{j-1} = \text{Ker}(f_j)$ ;
- $f_{n-1}$  est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_j = 0.$$

**Exercice 13** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  définie par  $f : P \mapsto P + P' + P''$ .

- 1) Montrer que  $f$  est injective. En déduire que  $f$  est bijective.
- 2) On appelle  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  définie par  $\varphi : P \mapsto P + P' + P''$ . Montrer que  $\varphi$  est surjective puis bijective.

**Exercice 14** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension égale à  $n$ . Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{Im } f = \text{Ker } f.$$

**Exercice 15** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

- 1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme  $u$  tel que  $\text{Ker}(u) = F$  et  $\text{Im}(u) = G$ .
- 2) Construire un tel endomorphisme  $u$  avec  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ .

**Exercice 16** (🚲) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\text{rg}(f^n) = \text{rg}(f^{n+1})$ .

**Exercice 17** (📎) Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ . Montrer que  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{K}_n[X]$  et en déterminer une base.

**Exercice 18** (📎) Montrer que les formes linéaires sur  $\mathbb{K}^3$   $\varphi : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$  et  $\psi : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$  sont linéairement indépendantes.

**Exercice 19** Quelle est la nature de l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5x + 2y \\ -12x + 5y \\ -4x + 2y - z \end{pmatrix}$$

Déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 20** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit  $p, q \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

- 1)  $p \circ q = p$  et  $q \circ p = q$  ;
- 2)  $p$  et  $q$  sont deux projecteurs de même noyau.

**Exercice 21** (📎) On pose  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$  et  $G = \text{Vect}(1, 1, 0)$ .

- 1) Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) Déterminer une expression explicite de la projection de  $\mathbb{R}^3$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Exercice 22** Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $p - q$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = q$ .

