Feuille d'exercice n° 21 : **Familles de vecteurs et espaces de dimension finie**

Exercice 1 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$, comparer (*i.e.* dire s'ils sont égaux ou si l'un est inclus dans l'autre) les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \text{Vect}\,\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\}\ ; \\ G & = & \text{Vect}\,\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\}\,. \end{array}$$

Exercice 2 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

Exercice 3 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes.

1) $v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(0,1,2,-1)$, $v_3=(1,0,-2,3)$, $v_4=(2,1,0,-1)$, $v_5=(4,3,2,1)$.

2) $v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(0,1,2,-1)$, $v_3=(3,4,5,16)$.

3) $v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(0,1,2,-1)$, $v_3=(2,1,0,11)$, $v_4=(3,4,5,14)$.

Ces vecteurs forment-ils :

1) Une famille libre ? Si c'est le cas, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille une base du sous-espace vectoriel engendré par celle-ci.

2) Une famille génératrice ? Si c'est le cas, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 4 ( ) Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(4,1,4)$ et $v_3=(2,-1,4)$.

1) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.

2) La famille (v_1,v_2,v_3) est-elle libre ?

Exercice 5 Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E. Comparer $\text{Vect}(A\cap B)$ et $\text{Vect}\,A\cap\text{Vect}\,B$.

Exercice 6 Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, on pose $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^k$.

1) Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) Est-ce toujours le cas pour la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

Exercice 7 ( ) Définir par leurs équations cartésiennes dans la base canonique les sous-espaces vectoriels :

1) F engendré par : $\{(3,1,2);(2,1,3)\}$ dans $\mathbb{R}^3$;

2) G engendré par : $(1,2,3)$ dans $\mathbb{R}^3$;

3) H engendré par $\{(1,2,3,0);(4,-1,2,0);(2,1,-3,0)\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8 ( ) Soit $n\in\mathbb{N}$, soit $a\in\mathbb{R}$.

1) Montrer que la famille $((X-a)^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Donner les coordonnées de $P\in\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 9 (✎) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $P = X^3 + 2X - 1$ et $Q = 2X - 1$. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dont P et Q sont éléments.

Exercice 10 (✎) Soit $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1), \mathbf{v}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,-1,1,-1), \mathbf{v}_4 = (7,2,0,-1)$ et $\mathbf{v}_5 = (-2,1,0,5)$.

1) Donner une base du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{R}^4$) $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$.

2) Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^4$.