Feuille d'exercice n° 20 : **Développements limités - fiche d'entraînement - correction**

Exercice 1

1) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^3} = 0$ donc $n^3 - \sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$.

De même, $\ln n - 2n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -2n^2$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{-2n^2} = -n/2$.

2) $\ln(n^2+1) = \ln n^2 + \ln(1+1/n^2) = 2\ln n + \ln(1+1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n$ et $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln n}{n}$.

3) $w_n = \dfrac{n\sqrt{n+1/n+1/n^2}}{n^{2/3}\sqrt[3]{1-1/n+1/n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1/3}$.

4) $\cos(1/n) = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$ et $\mathrm{e}^{1/n} = 1 + 1/n + o(1/n)$, donc :
$\cos(1/n) - \mathrm{e}^{1/n} = -1/n + o(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$.

5) $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1/n^2}{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/n$.

6) $\ln(1+\sin(1/n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(1/n)$ car $\sin(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} n+\infty 0$, et $\sin(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$, donc :
$\ln(1+\sin(1/n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$.
Enfin, $1 - \sqrt{1+1/n} = 1 - 1 - 1/(2n) + o(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/(2n)$, d'où $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -2$.

Exercice 2

1) $1 - x + \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{11}{24}x^3 + o\left(x^3\right)$

2) $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{90}x^3 + o\left(x^3\right)$

3) $1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{12}(x-1)^2 + o\Big((x-1)^2\Big)$

4) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{90}x^3 + o\left(x^3\right)$

5) $1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 - \dfrac{1}{144}x^4 - \dfrac{1}{240}x^5 + o\left(x^5\right)$

6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})$ d'où :

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln(e^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})) = \ln(e^x) + \ln(1 - \frac{x^{1000}e^{-x}}{1000!} + o(x^{1000})) = x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000}).$$

Exercice 3

$$1)\ \mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}\,x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}\,x^4}{6} + o\left(x^4\right)$$

$$2)\ \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^5\right)$$

$$3)\ \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{x}{3} + o\left(x^3\right)$$

$$4)\ \mathrm{e}^{\arcsin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

$$5)\ \arccos\left(\frac{1+x}{2+x}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{5x^2}{24\sqrt{3}} + o\left(x^3\right)$$

$$6)\ \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right))$$

$$7)\ \ln(1 + \operatorname{ch} x) = (\ln(2) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o\left(x^4\right))$$

$$8)\ \ln(\tan x) = (2\ (x - 1/4\,\pi) + \frac{4}{3}(x - 1/4\,\pi)^3 + o\left((x - 1/4\,\pi)^4\right))$$

$$9)\ \arctan(\mathrm{e}^{x}) = (1/4\,\pi + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o\left(x^3\right))$$

$$10)\ \arctan(2\sin x) = (1/3\,\pi + \frac{1}{4}(x - 1/3\,\pi) - 3/16\sqrt{3}\,(x - 1/3\,\pi)^2 + \frac{3}{16}(x - 1/3\,\pi)^3 + o\left((x - 1/3\,\pi)^3\right))$$