

Feuille d'exercice n° 20 : **Analyse asymptotique**

Exercice 1 (✎) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies (on les démontrera alors) et lesquelles sont fausses (on donnera un contre-exemple).

- 1) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 2) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- 3) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- 4) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = o(u_n)$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- 5) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $v_n \sim u_n$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- 6) Si $v_n \sim u_n$, alors $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- 7) Si $v_n \sim u_n$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- 8) Si $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $v_n \sim u_n$.

Exercice 2 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 3 Donner un exemple de suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$.

Exercice 4 (🚲) – **Encadrement et équivalents** –

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites ne s'annulant pas. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et que $u_n \sim w_n$. Que peut-on dire de (v_n) ?

Exercice 5 (✎) Trouver un équivalent simple des suites de termes généraux suivants.

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\ln \cos \frac{\pi}{n} + \tan \operatorname{sh} \frac{1}{n}$ | 5) $\sqrt{n} \sin \frac{\pi}{n}$ | 9) $e^{\sin \frac{\pi}{n}} - \sin \left(\sin \frac{\pi}{2n} \right)$ |
| 2) $\ln \cos \frac{\pi}{n} + e^{\tan(\pi/n^2)} - 1$ | 6) $\ln(n+1) - \ln(n+2)$ | 10) $\ln \frac{1 + \operatorname{ch} \frac{1}{n}}{2}$ |
| 3) $3 + e^{1/n} - \frac{6}{n}$ | 7) $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+5} - \frac{4}{n^2}$ | 11) $e^{e^{-n}} - e$ |
| 4) $\sqrt{1 + e^{-n}} - \cos e^{-n}$ | 8) $(n + \ln n)e^{-n+1}$ | |

Exercice 6 Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$

Exercice 7 (🐘) Déterminer un équivalent de la suite de terme général $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

- 1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède une limite et la déterminer.
- 2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x$.
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $u_n \leq \ln(2n)$.
c) Montrer que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.
d) Montrer que : $u_n - \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 9 (🚲)

- 1) Montrer que l'équation $\ln x + x = k$ admet une unique solution x_k , quel que soit $k \in \mathbb{N}$. On définit ainsi une suite réelle $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- 2) Montrer que l'on peut écrire : $x_k = ak + b \ln k + c \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$, où a , b et c sont des constantes que l'on déterminera.

Exercice 10 (📎) Soit f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Exercice 11 (📎 🚲) Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} . On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, et que ces fonctions admettent une limite commune notée $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- 1) On suppose dans cette question que f et g sont à valeurs strictement positives.
 - a) Montrer que si, $\ell \neq 1$, alors $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(g(x))$.
 - b) Que pouvez-vous dire lorsque $\ell = 1$?
- 2) Parmi les équivalents suivants, lesquels sont systématiquement vrais ? (on pourra discuter selon les valeurs de ℓ).

a) $\text{Arctan}(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Arctan}(g(x))$	b) $\sin(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sin(g(x))$
---	---

Exercice 12 (📎) Soit f, g, f_1 et g_1 des fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $f \underset{a}{\sim} f_1$ et $g \underset{a}{\sim} g_1$ avec $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$, alors $f + g \underset{a}{\sim} g_1$

Exercice 13 Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Exercice 14 (📎) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq b$. Déterminer les limites des expressions suivantes.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $\frac{\sin(x \ln(1+x^2))}{x \tan x}$, lorsque $x \rightarrow 0$ 2) $\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$, lorsque $x \rightarrow 0$ 3) $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$, lorsque $x \rightarrow 0$ 4) $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$, lorsque $x \rightarrow +\infty$ 5) $\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$, lorsque $x \rightarrow +\infty$ 6) $\frac{\tan(ax) - \sin(ax)}{\tan(bx) - \sin(bx)}$, lorsque $x \rightarrow 0$ | <ol style="list-style-type: none"> 7) $\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 8) $\frac{\cos(x) - \sin(x)}{(4x - \pi) \tan(x)}$, lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 9) $x^{\frac{1}{1+2 \ln(x)}}$, lorsque $x \rightarrow 0$ 10) $(2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$, lorsque $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 11) $\frac{(\sin(x))^{\sin(x)} - 1}{(\tan(x))^{\tan(x)} - 1}$, lorsque $x \rightarrow 0^+$ |
|--|---|

Déterminer les équivalents des expressions suivantes.

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 12) $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}$, en $+\infty$ 13) $\frac{\tan(x - x \cos(x))}{\sin(x) + \cos(x) - 1}$, en 0 | <ol style="list-style-type: none"> 14) $(\tan(2x) + \tan(x + \frac{\pi}{4})) (\cos(x + \frac{\pi}{4}))^2$, en $\frac{\pi}{4}$ 15) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$, en $+\infty$ |
|---|--|

Exercice 15 (✎) Déterminer l'existence et la valeur des limites des expressions suivantes.

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{x^x - 1}{\ln x}$, lorsque $x \rightarrow 1$ | 4) $\frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$, lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ |
| 2) $\left(\frac{x^2}{\ln(\cos x)} + \frac{2}{x^2} \sin^2 x\right)$, lorsque $x \rightarrow 0$ | 5) $\sin \frac{1}{x} \tan\left(\frac{2\pi x}{4x+3}\right)$, lorsque $x \rightarrow +\infty$ |
| 3) $\frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$, lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ | 6) $\ln x \tan(\ln(1+x))$, lorsque $x \rightarrow 0^+$ |
| | 7) $(\ln x)^{\tan \frac{\pi x}{2e}}$, lorsque $x \rightarrow e$ |

Exercice 16

- À quels ordres $x \mapsto \sqrt{x}$ admet-elle un développement limité en 0 ?
- À quels ordres $x \mapsto x^2 + x^{\frac{13}{3}}$ admet-elle un développement limité en 0 ?
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto |x|^n$ admet-elle un développement limité d'ordre n en 0 ?

Exercice 17 (✎) Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes.

- | | |
|---|---|
| 1) $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 5). | 4) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4). |
| 2) $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6). | 5) $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3). |
| 3) $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 5). | 6) $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9). |

Exercice 18 (✎) Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée, à la précision demandée.

- | | |
|--|--|
| 1) $\sqrt{x+1}$ à la précision $\frac{1}{x^{3/2}}$ | 3) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $\frac{1}{x^2}$ |
| 2) $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ à la précision $\frac{1}{x^2}$ | 4) $\text{Arctan } x$ à la précision $\frac{1}{x^3}$ |

Exercice 19 (✎) Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n des expressions suivantes.

- $\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$, pour $n = 2$ et $a = 0$
- $\ln(\sin x)$, pour $n = 3$ et $a = \frac{\pi}{4}$
- $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, pour $n = 3$ et $a = 0$
- $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$, pour $n = 2$ et $a = +\infty$

Exercice 20

- Démontrer que \tan et \tan' admettent un développement limité en 0 à tout ordre. Expliquer comment obtenir le développement limité de \tan à partir de celui de \tan' .
- En exploitant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, donner le développement limité de \tan en 0 à l'ordre 7.

Exercice 21 (🏹)

- Donner le développement limité de $x \mapsto \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$ en 0 à l'ordre 4.
- Sur le même modèle, donner un développement limité de $x \mapsto \int_x^{\frac{1}{x}} e^{-t^2} dt$ en 1 à l'ordre 3.

Exercice 22 (✎) Calculer les développements asymptotiques suivants.

1) $\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$, en $+\infty$ à 2 termes 2) $\ln(\sqrt{1+x})$, en $+\infty$ à 2 termes

Exercice 23 (✎) Déterminer les DL des expressions suivantes, à l'ordre 4 et en 0.

1) $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$ 3) $\frac{\ln(1+x)}{\cos x}$ 5) $\frac{\sin(x/2)}{e^{2x}}$
 2) $\frac{\sqrt{1+x}}{\cos x}$ 4) $\frac{1+\cos x}{2+\sin x}$ 6) $\frac{\ln(1+x)}{2-\cos x}$

Effectuer les DL des expressions suivantes, à l'ordre 4.

7) $\frac{\sin(2x - \pi/4)}{\cos x}$, en π 8) $\frac{e^{x-1}}{\ln x}$, en 1

Effectuer le DL de l'expression suivante.

9) $\frac{\cos(x-1)}{\ln(1+x)}$, à l'ordre 2 et en 1.

Exercice 24 Calculer les limites des expressions suivantes, lorsqu'elles existent.

1) $(\tan x)^{\tan 2x}$ en $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1
 2) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ en 0 5) $\frac{1}{\sin^4 x} \left(\sin \frac{x}{1-x} - \frac{\sin x}{1-\sin x} \right)$ en 0
 3) $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ en 0 6) $\frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x - 1)}$ en 0

Exercice 25 (✎) Soit $f : x \mapsto (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et étudier la dérivabilité du prolongement de f .

Exercice 26 (✎) Soient u, v, f définies par :

$$u : x \mapsto (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}, \quad v : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad f : x \mapsto u(x) - v(x).$$

- 1) Donner l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par rapport à cette asymptote.
- 2) Même étude en $+\infty$.

Exercice 27 (✎) Soit $g : x \mapsto \frac{\text{Arctan } x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2}$.

- 1) Donner le domaine de définition de g .
- 2) Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
- 3) Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 28 (✎) Étudier la position du graphe de l'application $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 29 Étudier les branches infinies des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan}(1 + x^2)$

2) $g : x \mapsto x \sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la limite en 0 de

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Exercice 31 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \frac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f : x \mapsto (x-a)^n F(x)$, décomposer F sur \mathbb{R} .

Exercice 32 Donner les natures des séries de terme général (u_n) suivantes (i.e. de $\left(\sum_{n=1}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$).

1) $u_n = \operatorname{th} \frac{1}{n} + \ln \frac{n^2 - n}{n^2 + 1}$

2) $u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$

3) $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

