Feuille d'exercice n° 17 : **Dérivation**

Exercice 1 — Limite double –
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (h,k) \in]0,\delta[^2, \qquad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2 Soit f l'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Exercice 3 (✎) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \sin x$ **2)** $g : x \mapsto \sin^2 x$ **3)** $h : x \mapsto \sin^3 x + \cos^3 x$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n^{e} de chacune des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$ **2)** $g : x \mapsto x^2(1+x)^n$ **3)** $h : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$ **4)** $\varphi : x \mapsto x^{n-1} \ln x$

Exercice 5 Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 6 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que par tout point $(x_0, 0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R} \backslash [a,b]$, il passe au moins une tangente à la courbe représentative de f.

Exercice 7 (✎) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \ \text{ et } \ f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 — Rolle à l'infini –
Soit $a \in \mathbb{R}$, f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a, +\infty[$, vérifiant $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} f(a)$.
Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a,b[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, de degré supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que P' est aussi scindé à racines simples réelles.

2) Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11 **– Polynômes de Legendre –**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f : t \mapsto (t^2 - 1)^n$.

1) Montrer que : $\forall\, k \in \{0, \dots, n-1\},\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.

2) Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.

3) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 12 Étant donné α dans $]0, 1[$, montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$.

Exercice 13 **– Distance à la corde –**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1) On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Indication : considérer $g : t \mapsto f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$.

2) On traite maintenant le cas général. Soit $c \in]a, b[$, montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Exercice 14 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Exercice 15

1) Montrer que si une fonction f est lipschitzienne sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors, $|f|$ l'est aussi.

2) Montrer que la réciproque est fausse.

3) Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur I est lipschitzienne sur I.

Exercice 16 La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est-elle lipschitzienne sur $]0, +\infty[$? sur $[1, +\infty[$?

Exercice 17 On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in [-1, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

1) Montrer que cette suite ne possède qu'une seule limite finie éventuelle α que l'on calculera.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 18 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + \ln(u_n)$.

1) Montrer que l'équation $x = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$ possède une unique solution réelle L.

2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ puis, que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n - L| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$. Conclure.

Exercice 19 ( ) Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que pour

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab.$$

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1) Montrer que si f est convexe et majorée, alors f est constante.

2) Est-ce toujours le cas si f est définie sur $[A, +\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$?

3) Montrer que si f est deux fois dérivable, bornée et non constante, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $f''(a)f''(b) < 0$.

Exercice 21 ( ) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et k entier compris entre 0 et 2^n, on a : $f\left(\dfrac{k}{2^n}x + \left(1 - \dfrac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \dfrac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \dfrac{k}{2^n}\right)f(y)$.

2) Montrer que tout réel est limite d'une suite de rationnels de la forme $\dfrac{q}{2^n}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que f est convexe.