Feuille d'exercice n° 16 : **Polynômes**

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes.

1) $Q^2 = XP^2$, d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

2) $P \circ P = P$, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 Résoudre en $P \in \mathbb{C}[X]$ l'équation $P \circ (X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 3 ( ) Soient $a, b \in \mathbb{K}$, avec $a \neq b$, soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$, en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 4 ( ) Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes suivantes.

1) $X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par $X - 1 + i$

2) $4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 6 ( ) Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 7 Trouver le(s) polynôme(s) A de degré 4 tel(s) que : $X^2+1 | A$ et $X^3+1 | A-1$.

Exercice 8 ( ) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ ses racines sont parmi $0, 1, -j, -j^2$. En déduire tous les polynômes solution de cette équation.

Exercice 9 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$. *Indications* :

1) Montrer que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.

2) Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, écrire $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ comme somme de deux carrés de polynômes.

Exercice 10 ( ) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

Exercice 11 Résoudre les équations suivantes.

1) $(P')^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

2) $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 12 Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} a^2+b^2+c^2 & = & 14 \\ a+b+c & = & 2 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} & = & \dfrac{5}{6} \end{array}\right.$.

Exercice 13 ( ) Déterminer le PGCD de chacun des couples de polynômes suivants.

1) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$

2) $X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$

3) $X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$

Exercice 14 (✎) Calculer un couple de Bézout pour chacun des couples de polynômes suivants.

1) $X^5 - X^4 + 2X^3 - X^2 + X - 2$ et $X^4 - 2X^3 - X + 2$

2) $X^4 + 2X^3 - X - 2$ et $X^5 + X^4 - 3X^3 + X^2 + 4X - 4$

Exercice 15 (🚲) Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux.

1) Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux, où n, m sont deux entiers positifs.

2) Montrer de même que $P + Q$ et PQ sont premiers entre eux.

Exercice 16 Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, non constant. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que quel que soit l'entier naturel q, $P^b - 1$ divise $P^{bq} - 1$.

2) En déduire que le reste de la division de $P^a - 1$ par $P^b - 1$ est $P^r - 1$ où r est le reste de la division dans $\mathbb{N}$ de a par b.

3) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de $P^a - 1$ et $P^b - 1$.

4) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

5) Application : trouver le pgcd de $X^{5400} - 1$ et $X^{1920} - 1$, et déterminer $\mathbb{U}_{5400} \cap \mathbb{U}_{1920}$.

Exercice 17 Les polynômes complexes $P = X^{2025} + X + 1$ et $Q = X^5 + X + 1$ sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 18 (⛰) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer qu'il existe deux polynômes U, V, vérifiant $(1 - X)^n U + X^n V = 1 \quad (\star)$.

2) Déterminer deux polynômes U_1, V_1 de degré strictement inférieur à n, satisfaisant $(\star)$.
Indication : On pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

3) En déduire tous les polynômes U, V vérifiant $(\star)$.

4) Montrer que U_1 et V_1 sont les seuls polynômes de degré strictement inférieur à n satisfaisant $(\star)$.

5) Déterminer les coefficients de U_1 et de V_1.

Exercice 19

1) Déterminer les polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, premiers entre eux et à coefficients entiers, tels que $P^2 + Q^2 = (X^2 + 1)^2$.

2) En déduire que l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ a une infinité de solutions (non proportionnelles) dans $\mathbb{Z}$.