

Feuille d'exercice n° 15 : **Continuité**

Exercice 1 Etudier la continuité des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x + \sqrt{x - [x]}$

2) $g : x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$

Exercice 2 (~~🚲~~) Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer s'il est possible de la prolonger par continuité et comment.

1) $f : x \mapsto \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2) $g : x \mapsto \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

3) $h : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$

Exercice 3 – Inverse généralisé d'une fonction –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante. On définit, pour tout réel x , $F(x) = \sup \{ y \in \mathbb{R} \mid f(y) \leq x \}$.

1) Donner l'ensemble de définition de F .

2) On prend pour cette question $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$, et $f|_{\mathbb{R}_-} = 0$. Déterminer F .

3) On prend pour cette question $f : x \mapsto \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Déterminer F , étudier sa continuité, continuité à droite, à gauche.

Que peut-on dire de $f \circ F$ et de $F \circ f$?

4) Que peut-on dire si f est bijective ?

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

2) a) En revenant à la définition de continuité, montrer que f est continue en 1 et en -1 .

b) Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Donner, en la justifiant, la valeur des quantités suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

i) $f\left(a + \frac{1}{n}\right)$

ii) $f\left(a + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$

iii) $f\left(b + \frac{1}{n}\right)$

iv) $f\left(\frac{\lfloor 10^n b \rfloor}{10^n}\right)$

c) Que dire de la continuité de f en $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

3) À quoi ressemblerait la courbe représentative de f , vue par un myope ?

Exercice 5 Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 6 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, soit f, g définies et continues sur $[a; b]$ telles que

$$\forall x \in [a; b], 0 < g(x) < f(x).$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a; b], (1 + \lambda)g(x) < f(x).$$

Exercice 7 (🏔️) Trouver toutes les fonctions vérifiant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

- 1) La fonction f est continue en 0 et $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos x$.
- 2) La fonction f est continue et $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x + 1) = f(x)$

Exercice 8 (🚲🏔️) Montrer qu'une fonction définie sur \mathbb{R} , continue, périodique et non constante possède une plus petite période (strictement positive).

Exercice 9 (📎🚲) – **Fonctions contractantes** –

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ telle que, pour tout $x, x' \in [a, b]$ avec $x \neq x'$, on a :

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

- 1) Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Exercice 10 (🚲)

Soit P un polynôme de degré impair et à coefficients réels. Montrer que P possède une racine réelle.

Exercice 11 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \exists x' \in [a, b], f(x) = g(x').$$

On veut montrer que

$$\exists c \in [a, b], f(c) = g(c).$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $x \in [a, b], f(x) \neq g(x)$.

- 1) Montrer qu'alors $f - g$ est de signe constant et ne s'annule pas.
- 2) On suppose que $f - g > 0$.
 - a) Montrer que f et g possèdent chacune un maximum sur $[a, b]$. On les notera M_f et M_g .
 - b) Montrer que $M_g \geq M_f$ et conclure.
- 3) Retrouver le résultat si $f - g < 0$.

Exercice 12 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

- 1) Montrer que la fonction $g : t \mapsto f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.
- 2) Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 13 (🚲) – **TVI à l'infini** –

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclu).

Exercice 14 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $[a, b]$, telles que

$$\forall x \in [a, b], f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

On pose $E = \{x \in [a, b] \mid f(x) = x\}$.

- 1) Montrer que E a une borne inférieure et une borne supérieure. On notera $\alpha = \inf E$ et $\beta = \sup E$.
- 2) Montrer qu'il existe une suite (α_n) d'éléments de E telle que $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$. On montrerait de même qu'il existe une suite (β_n) d'éléments de E telle que $\beta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \beta$.
- 3) Montrer que α et β sont dans E .
- 4) Montrer que $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont dans E .
- 5) Établir que $\exists x_0 \in [a, b], f(x_0) = g(x_0)$ (on pourra considérer la fonction $h = g - f$).

