Feuille d'exercice n° 12 : **Suites**

Exercice 1 ( ) – Méfiez-vous des faux amis –

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies (on les démontrera alors) et lesquelles sont fausses (on donnera un contre-exemple).

1) Si (u_n) converge, alors $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0.

2) Si $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0, alors (u_n) converge.

3) Si (u_n) converge et pour tout n $u_n \neq 0$, alors $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 1.

4) Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$ et si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 1, alors (u_n) converge.

5) Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$ et si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers $1/2$, alors (u_n) converge.

6) Si (u_n) converge vers 0 et si (v_n) diverge, alors à partir d'un certain rang $|u_n|\leqslant|v_n|$.

7) Si (u_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

8) Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.

9) (u_n) converge si et seulement si $(|u_n|)$ converge.

10) Si $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

11) Si (u_n) n'est pas majorée, elle admet une sous-suite strictement croissante qui tend vers $+\infty$.

12) Si (u_n) est monotone et admet une sous-suite convergente, alors (u_n) est convergente.

13) Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.

14) Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

15) Si (u_n+v_n) est convergente, (u_n) et (v_n) convergent.

16) Si (u_n) converge et (v_n) diverge, (u_n+v_n) diverge.

17) Si (u_nv_n) est convergente, (u_n) et (v_n) convergent.

18) Si (u_n) converge, $(\lfloor u_n\rfloor)$ également.

Exercice 2 Étudier la suite de terme général $u_n=\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, a et b étant donnés dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 ( ) – Lemme de Césaro –

Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u_k$.

1) Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Soit $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

3) Donner un exemple où (v_n) converge mais (u_n) diverge.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

1) On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que

- **a)** si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
- **b)** si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2) On suppose que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que

- **a)** si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
- **b)** si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Indication : utiliser le lemme de Césaro.

4) Chercher les limites des suites de termes généraux suivants.

a) $u_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ **b)** $v_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ **c)** $w_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$

Exercice 5 **– Divergence de $(\mathrm{e}^{in\theta})$ –**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, les suites $(\cos(n\theta))$ et $(\sin(n\theta))$ sont toutes les deux divergentes.
Indication : On pourra montrer que si l'une converge, alors l'autre aussi, puis obtenir une contradiction.

Exercice 6 Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants et calculer la limite, le cas échéant.

1) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$

2) $b_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$

3) $c_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$

4) $d_n = \left\lfloor 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rfloor$

5) $e_n = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$

6) $f_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$

7) $g_n = \dfrac{n^3+2^n}{3^n}$

8) $h_n = n - \sqrt{n^2-n}$

9) $i_n = 3n\sin\left(\dfrac{4\pi}{n}\right)$

Exercice 7 Soit (u_n) une suite complexe telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 8 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1) Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$. Montrer que, pour tout $a \geqslant u_{n_0}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.

2) En déduire que $\{\, u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N} \,\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Montrer que l'ensemble $\{\, \cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 9 On donne $u_0 \in \mathbb{R}$ et l'on pose, quand c'est possible, $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$.

1) Pour quelles valeurs de u_0 définit-on ainsi une suite (u_n) ?

2) Montrer qu'alors la suite (u_n) est périodique.

Exercice 10 Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Exercice 11 Soit $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$.

1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2) Résoudre l'équation $f(x) = x$ où $f : x \to \dfrac{3 + 2x}{2 + x}$. On notera α et β ses racines, avec $\beta < \alpha$.
3) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4) La suite (u_n) possède-t-elle une limite ?
5) Retrouver tout ceci par les méthodes standard.

Exercice 12 Soient $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 13 () Étudier la suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $|z_0| \leqslant 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n}{2 - z_n}$.

Exercice 14 () Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $v_n < u_{n-1} - u_n$.
2) En déduire que la suite de terme général $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ converge et majorer sa limite.

Exercice 15 () **– Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz –**

Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 16 () Soit la suite (H_n) de terme général $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = H_n - \ln(n)$ et $w_n = H_n - \ln(n+1)$.

1) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes (leur limite commune s'appelle la constante d'Euler, notée γ).
2) En déduire la nature de la suite (H_n).