

Feuille d'exercice n° 08 : **Notion d'application**

**Exercice 1** (✎) Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  .  
$$x \mapsto x + 1 \qquad y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y - 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

- 1) Préciser l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelle de  $f$  et  $g$ .
- 2) Préciser  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**Exercice 2** Soit  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  .  
$$x \mapsto x + 1 - \frac{1}{x - 1}$$

- 1)  $f$  est-elle injective ? surjective ?
- 2) Déterminer une partie  $E$  telle que  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  soit bijective et expliciter la réciproque.  
$$x \mapsto x + 1 - \frac{1}{x - 1}$$

**Exercice 3** Soit  $E$  un ensemble.

- 1) Montrer que pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ , on a

$$\mathbb{1}_{(A \cap B)} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B, \tag{1}$$

$$\mathbb{1}_{(A^c)} = 1 - \mathbb{1}_A, \tag{2}$$

$$\mathbb{1}_{(A \cup B)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B. \tag{3}$$

- 2) Montrer que l'application  $\mathbb{1} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$  est bijective.  
$$A \mapsto \mathbb{1}_A$$

**Exercice 4** (🚲) Soit  $E, F, G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ . Établir les implications suivantes.

- |  |   |
|--|---|
| 1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective   | 3) $g \circ f$ injective et $f$ surjective $\Rightarrow g$ injective  |
| 2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective | 4) $g \circ f$ surjective et $g$ injective $\Rightarrow f$ surjective |

**Exercice 5** (✎🏹) Soient  $E, E', F, F'$  quatre ensembles,  $u : E' \rightarrow E$ ,  $v : F \rightarrow F'$  deux applications. On définit l'application  $\varphi : F^E \rightarrow F'^{E'}$  .  
$$f \mapsto v \circ f \circ u$$

- 1) Vérifier que  $\varphi$  est bien définie.
- 2) Montrer que si  $v$  est injective et  $u$  surjective alors  $\varphi$  est injective.
- 3) Montrer que si  $v$  est surjective et  $u$  injective alors  $\varphi$  est surjective.

*Remarque* : cette dernière question est sensiblement plus difficile que les deux premières.

**Exercice 6** Soit  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux parties fixées de  $E$ . Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto (X \cap A, X \cap B). \end{cases}$

- 1) Qu'est-ce que  $\varphi(\emptyset)$  ?  $\varphi(\overline{A \cup B})$  ?
- 2) À quelle condition sur  $A$  et  $B$ ,  $\varphi$  est-elle injective ?
- 3) Est-ce que le couple  $(\emptyset, B)$  possède un antécédent par  $\varphi$  ?
- 4) À quelle condition sur  $A$  et  $B$ ,  $\varphi$  est-elle surjective ?

**Exercice 7** (🚲) Démontrer le théorème de Cantor : « Soit  $E$  un ensemble, il n'existe pas de surjection de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$  ».

*Indication* : avec  $\varphi$  une application de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on pourra s'intéresser à la partie

$$A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

**Exercice 8** (📎🚲) Soit  $E, I$  deux ensemble,  $f : E \rightarrow I$  une application surjective. On pose, pour tout  $i \in I$ ,  $A_i = f^{-1}(\{i\})$ .

Montrer que les  $A_i$  sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à  $E$ . (On dit que les  $A_i$  forment une *partition* de  $E$ .)

**Exercice 9** (🏹) Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application.

- 1) a) Montrer que, pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .  
b) Montrer que  $f$  est injective si et seulement si, pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $f^{-1}(f(A)) = A$ .
- 2) a) Montrer que, pour toute partie  $B$  de  $F$ ,  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .  
b) Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si, pour toute partie  $B$  de  $F$ ,  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

**Exercice 10** (🚲) Soient  $E, F$  deux ensembles, soit  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

