Feuille d'exercice n° 06 : **Équations différentielles**

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)}$

2) $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$

5) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}}$

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$

7) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$

9) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 Soit $a,b\in\mathbb{R}$, soit $I(a,b)=\displaystyle\int_a^b \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que $I(a,b)=I(-b,-a)$

2) Soient a et b de même signe. Montrer que $I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)=I(a,b)$. En déduire que $I(a,\frac{1}{a})=0$.

3) Soit $y\in[1,+\infty[$, montrer qu'il existe un unique $x\in\mathbb{R}_+$ tel que $y=\mathrm{ch}(x)$. On note alors $x=\mathrm{Argch}(y)$.

Remarque : on dit que x est *l'argument cosinus hyperbolique* de y.

4) Exprimer alors $\mathrm{e}^{\mathrm{Argch}(y)}$ en fonction de y

Facultatif : exprimer $\mathrm{Argch}(y)$ en fonction de y et étudier la fonction Argch.

5) Calculer $I(a,b)$ pour $a\geqslant 1$ et $b\geqslant 1$ en commençant par poser $u=x+\frac{1}{x}$, puis $u=\sqrt{2}\,\mathrm{ch}(t)$.

6) En déduire $I(a,b)$ lorsque a et b sont de même signe (non nul).

Exercice 3 On pose, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $I_{n,p}=\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p\mathrm{d}x$.

1) Exprimer, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n+1,p-1}$.

2) En déduire $I_{n,p}$ pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$,

3) Calculer $I_{n,n}$ pour tout entier naturel n et en déduire la limite de la suite $(I_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

1) **a)** Vérifier que la fonction $f : x\mapsto \ln\ \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ est définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

b) Résoudre : $y'-y\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ avec $y(0)=1$.

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

2) $y'+y=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$.

3) $y'-2y=\mathrm{sh}\,x-2x\,\mathrm{ch}\,x$ sur $\mathbb{R}$.

4) $xy'\ln x-y=3x^2\ln^2 x$ sur $]0,1[$.

5) $y'+x^2y+x^2=0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$.

6) $xy'-y=x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

7) $y'\sqrt{1-x^2}-y=1$ sur $]-1,1[$.

8) $y'-3y=x^2\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=1$.

Exercice 5 Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x\in[0,1]\quad f'(x)+f(x)=f(0)+f(1)$.

Exercice 6 Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$:

$$xy' + y = x(3x+4).$$

Exercice 7 Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

1) $y'' + y' - 2y = 8\sin x$ avec $y(\pi) = 0$ et $y'(\pi) = 1$

2) $y'' + y' = 4x^2 \mathrm{e}^x$ avec $y(0) = \mathrm{e}$ et $y'(0) = 0$

3) $y'' + 4y = x^2 - x + 1$

4) $y'' + y' + 2y = (8x+1)\mathrm{e}^x$

5) $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$

6) $y'' - y = \operatorname{sh} x$

Exercice 8 On étudie les équations différentielles d'Euler, qui sont de la forme $(\mathscr{E})$: $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$, où a, b et c sont des constantes et g est une fonction.

1) On suppose que l'on étudie $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on pose $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$. Montrer que y est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux, à coefficients constants (à déterminer en fonction de a, b et c).

2) Résoudre $x^2y'' + xy' - y = 2x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Trouver les applications de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x\mathrm{e}^x.$$

Exercice 10 Le but de cet exercice est de résoudre le système différentiel $(\mathbf{S})$ suivant :

$$\begin{cases} x'' &= x' + y' - y \\ y'' &= x' + y' - x \end{cases}, \qquad \text{en } x, y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

1) Soient $x, y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$. Montrer alors qu'il existe deux équations différentielles du second ordre $(\mathbf{E})$ et $(\mathbf{F})$ telles que l'on ait : (x, y) est solution de $(\mathbf{S})$ si et seulement si u est solution $(\mathbf{E})$ et v est solution de $(\mathbf{F})$.

2) Résoudre $(\mathbf{E})$.

3) Résoudre $(\mathbf{F})$.

4) En déduire les solutions de $(\mathbf{S})$.