Feuille d'exercice n° 04 : **Quelques fondamentaux**

Exercice 1 Soit P, Q deux propositions. La proposition $\big(P \wedge Q \Longrightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle nécessairement vraie ?

Exercice 2 Soit la propriété suivante : $P(z)$: «$|z-1| \leq 3 \Longrightarrow |z-5| \geq 1$».

1) Quel est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z)$ soit vraie ? A-t-on : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z)$ vraie ?

2) Mêmes questions en remplaçant $|z-5| \geq 1$ par $|z-5| > 1$, puis par $|z-5| \geq 2$.

Exercice 3 (✎) Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1) $P \Rightarrow Q$

2) P et non Q

3) P et (Q et R)

4) P ou (Q et R)

5) (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$)

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité :

1) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ n \leqslant N$ et $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \leqslant N$.

2) $\forall y \in \mathbb{R}_+^*\ \exists x \in \mathbb{R}\ y = \mathrm{e}^x$ et $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ y = \mathrm{e}^x$.

3) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ y = f(x)$.

Exercice 5 (✎) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Quelle est la négation des propositions suivantes ?

1) $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 1$ ou $f(x) \leqslant -1$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \leqslant f(x) \leqslant 2x + y$

5) $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant y) \Rightarrow x \leqslant 0$

Exercice 6 Soient les quatre assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$;

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$;

(d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad y^2 > x$.

1) Les assertions *(a)*, *(b)*, *(c)* et *(d)* sont-elles vraies ou fausses ?

2) Donner la négation de chacune.

Exercice 7 (🚲) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

1) f est croissante.

2) f est périodique.

3) f s'annule au plus une fois.

4) f prend au moins une fois la valeur 1.

Exercice 8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2|x-1| = x^2 - 2$.

Exercice 9 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Exercice 10 **En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?**

Soit $\mathcal{P}(n)$: « n crayons de couleurs sont tous de la même couleur ».

— $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.

Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

— On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

Exercice 11 Dans un match de rugby, une équipe peut marquer 3 points (pénalité ou drop), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Quel est l'ensemble des scores possibles ?

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $u_0 \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant 2^n$.