Feuille d'exercice n° 02 : **Fonctions usuelles**

Exercice 1 (✎) Factoriser les expressions suivantes, puis déterminer le tableau de signes de chacune.

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

2) $g(x) = x\ln(x) - x - 2\ln(x) + 2$

3) $\varphi(x) = x + 8 - \dfrac{16}{x-7}$

4) $\psi(x) = x\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{x} - 2x - 6$

Exercice 2 (✎) Dériver et dresser les tableaux de variations des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{x}$

2) $g : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x) - 1}$

3) $\varphi : x \mapsto \ln|x|$

4) $\psi : x \mapsto 3\ln|x-2| + 2\ln|x+3|$

Exercice 3 (✎)

1) Montrer que la somme de deux applications croissantes est croissante.

2) La somme de deux applications monotones est-elle nécessairement monotone ?

3) Le produit de deux applications croissantes est-il nécessairement une application croissante ?

Exercice 4 (✎) Déterminer le domaine de définition, de $g \circ f$ dans chaque cas.

1) $f : x \mapsto 1 + \dfrac{3}{x-5}$ et $g = \sqrt{\cdot}$.

2) $f = \cos$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

3) $f : x \mapsto x + 3\ln(x)$ et $g = \exp$.

4) $f = \sin$ et $g = \ln$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{\begin{array}{ccc} 2^{3x+2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \end{array}\right.$.

Exercice 7 Résoudre l'équation $\ln\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$.

Exercice 8 (✎🚲) Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \sin(\operatorname{Arcsin} x)$

2) $g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$

Exercice 9 (✎) Simplifier les expressions suivantes.

1) $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3)** $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ **5)** $\operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ **7)** $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$

2) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ **4)** $\operatorname{Arccos}(\cos 4\pi)$ **6)** $\sin(\operatorname{Arccos} x)$ **8)** $\cos(\operatorname{Arctan} x)$

Exercice 10 (🚲) Démontrer les inégalités suivantes.

1) Pour tout $a \in]0,1[$, $\operatorname{Arcsin} a < \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

2) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan} a > \dfrac{a}{1+a^2}$.

Exercice 11

1) Soit $x \in [0, \pi/8[$. Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$.

2) En déduire la formule de Machin : $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239}$.

Remarque : John Machin a pu calculer 100 décimales de π à la main en 1706 grâce à cette relation.

Exercice 12

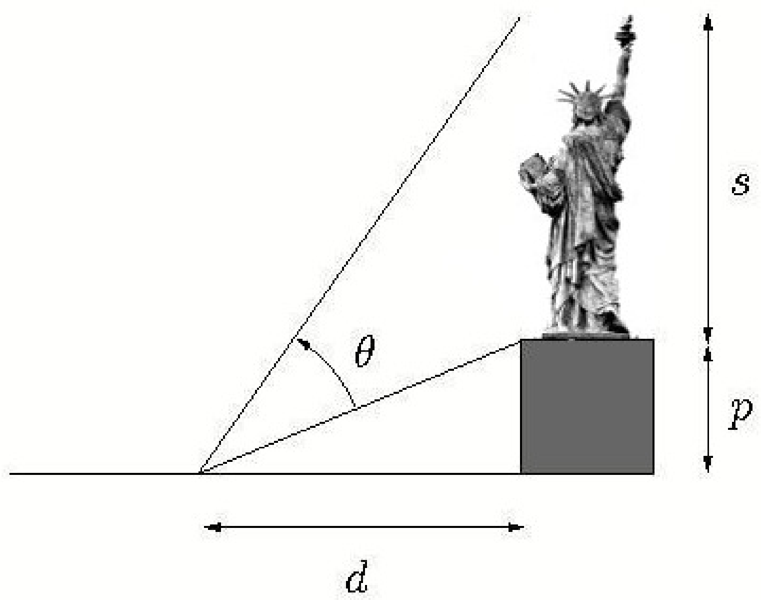

FIGURE 1 – La statue

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance du pied de la statue un observateur (dont la taille est supposée négligeable) doit-il se placer pour la voir sous un angle maximal (*i.e.* pour avoir θ maximal, avec les notations de la figure **1**) ?

Exercice 13 (🚲) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ est définie l'équation $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin}(1-x)$? La résoudre.

Exercice 14 On définit les deux fonctions f et g par $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$ et $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

1) Déterminer leurs ensembles de définition.

2) Calculer, lorsque cela est possible, leurs dérivées.

3) Que peut-on en déduire concernant $f(x)$ et $g(x)$? Donner le maximum de précisions.

4) Tracer les courbes représentatives de f et de g (sur un même schéma).

Exercice 15 () Calculer $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

Exercice 16 () Résoudre : $\operatorname{Arcsin}2x=\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right)$.

Exercice 17 Soit la fonction $f\ :\ \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right) \end{array}$.

Montrer que f est bien définie et que l'on a les relations suivantes, pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

1) $\operatorname{th}\left(\dfrac{f(x)}{2}\right)=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

2) $\operatorname{th}(f(x))=\sin(x)$

3) $\operatorname{ch}\left(f(x)\right)=\dfrac{1}{\cos(x)}$

4) $\operatorname{sh}\left(f(x)\right)=\tan(x)$.

Exercice 18 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Résoudre l'équation $a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x=0$.