

Exercice 1

- 1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
- 2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh} \left(\frac{1}{n} \right) - \tan \left(\frac{1}{n} \right)$.

Exercice 2

- 1) On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
- 2) On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
- 3) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 3

- 1) Énoncer le théorème des accroissements finis.
- 2) Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et que f est dérivable sur $]a; x_0[$ et sur $]x_0; b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
- 3) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\implies$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

- 1) Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

- 2) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 5

- 1) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

- 2) étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(i-1) \sin \left(\frac{1}{n} \right)}{(\sqrt{n+3}-1) \ln n}$.

Exercice 6

On considère les deux équations suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

- 1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 7

- 1) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le sens géométrique de la somme de Riemann $R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$?

Illustrer par un dessin soigné.

(b) Démontrer, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(x) dx$.

- 2) Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{3n^2 + k^2}$.

Exercice 8

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in (\mathbb{C})^2$.

- 1) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
- 2) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

Exercice 9

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

- 1) Démontrer que f est bijectif de deux manières :
 - (a) sans utiliser de matrice de f ,
 - (b) en utilisant une matrice de f .
- 2) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

Exercice 10

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

- 1) Déterminer $\text{Ker } f$.
- 2) f est-il surjectif ?
- 3) Trouver une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \text{Id}$.

- 1) Démontrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f$.
- 2) Démontrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.
- 3) Démontrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$.

Exercice 12

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n .

- 1) Démontrer que : $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
- 2) (a) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
(b) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Exercice 13

Soit p , la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- 1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- 2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- 3) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 14

- 1) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
- 3) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 15

- 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
 - (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.
 - (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
 a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [0, r - 1]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
- 2) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16

Soit p un nombre premier.

- 1) (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
(b) Prouver que $\forall k \in 1, p-1$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis que p divise $\binom{p}{k}$.
- 2) (a) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.
Indication : Procéder par récurrence.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 17

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

- 1) Déterminer a et b pour que 1 soit racine d'ordre au moins 2 de P .
- 2) Dans ce cas, vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.

- 1) On suppose $k \in 1, n-1$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
- 2) On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 19

- 1) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
- 2) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
- 3) On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
(a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
(b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .

Exercice 20

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

- 1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
(a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
(b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
- 2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
(a) Déterminer la loi de X .
(b) Déterminer la loi de Y .

Exercice 21

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

- 1) Donner la loi de X . Justifier.
- 2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
 - (a) Soit $i \in 0, n$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
 - (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
 - (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z .

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) Déterminer la loi de Y .

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

- 1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
- 2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- 3) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A , B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.