Devoir surveillé n° 9
Version 2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Étude d'une suite de tirages.

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels tous deux non nuls et l'on note $N = a+b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au « hasard » et « avec remise » d'une boule, en procédant de la façon suivante :

— lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
— lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne mais remplacée dans l'urne par une boule blanche et l'on procède au tirage suivant.

Partie I

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini modélisant cette expérience et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire à l'obtention d'une première boule blanche.

1) Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.

2) Pour tout entier k compris entre 1 et $b+1$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y=k)$.

3) Vérifier que
$$P(Y = b+1) = \frac{b!}{N^b}$$
et que, pour tout entier k compris entre 1 et b, la formule suivante est vraie :
$$P(Y=k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k} \ .$$

4) Soit M un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \dots, a_M$ une famille de réels. Établir que
$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - Ma_M \ .$$

5) En déduire que $\mathrm{E}[Y] = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

Partie II

Dans cette partie, on note :

— pour tout entier $n \geqslant 1$, q_n la probabilité de l'événement, noté N_n : « la n^{e} boule tirée est noire »,
— pour tout entier $n \geqslant 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages (par convention, $X_0 = 0$),
— pour tout entier $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : « au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires ».

6) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$?

7) Démontrer la formule suivante, valable pour tous les entiers naturels n et k non nuls :

$$N \cdot p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1} \quad . \tag{\textbf{F}}$$

8) Calcul de l'espérance de X_n.

a) À l'aide de la formule (**F**) obtenue dans la question **7)**, démontrer la formule pour $n \geqslant 1$:

$$N\mathrm{E}\left[X_n\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[b + k(N-1)\right] p_{n-1,k} \quad ,$$

puis justifier que

$$\mathrm{E}\left[X_n\right] = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathrm{E}\left[X_{n-1}\right] + \frac{b}{N} \quad .$$

b) En utilisant la dernière formule établie à la question **8)a)**, prouver que, pour tout entier naturel n, on a

$$\mathrm{E}\left[X_n\right] = b\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \quad .$$

9) Calcul de q_n.

a) En utilisant une formule des probabilités totales, établir la formule suivante valable pour tout entier naturel n :

$$N \cdot q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k)p_{n,k} \quad .$$

b) Pour tout entier naturel n, exprimer alors q_{n+1} en fonction de $\mathrm{E}\left[X_n\right]$ et en déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N.

II. Endomorphismes échangeurs.

Dans tout le problème, $(E,+,.)$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.
On dit qu'un endomorphisme u de E possède la propriété (P1) lorsqu'il existe deux endomorphismes a et b de E vérifiant les trois égalités

$$u = a + b, \quad a^2 = 0, \quad b^2 = 0 \tag{1}$$

(0 désignant l'endomorphisme nul, et $a^2 = a \circ a$).
On dit qu'un endomorphisme u de E possède la propriété (P2) lorsqu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E vérifiant les trois propriétés

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G, \quad u(G) \subset F \tag{2}$$

1) Un exemple : Dans cette question seulement, E désigne $\mathbb{R}^5$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Justifier que f vérifie (P2).

2) On suppose dans cette question que u vérifie (P2). On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E vérifiant les trois propriétés (2) et on note p la projection sur F parallèlement à G. On définit enfin $a = u \circ p$.

- **a)** Montrer que, si $x \in E, a(x) \in G$, puis $a^2(x) = 0_E$.
- **b)** Montrer que u vérifie (P1).

3) On considère dans cette question un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que u est un automorphisme de E vérifiant (P1). On note a et b deux endomorphismes vérifiant les égalités (1).

- **a)** Établir une inclusion entre $\operatorname{Ker}(a)$ et $\operatorname{Im}(a)$.
- **b)** Soit $x \in \operatorname{Im}(a)$. Montrer que $u(x) \in \operatorname{Im}(b)$.
- **c)** Montrer que $\operatorname{Im}(a) \cap \operatorname{Im}(b) = \{0_E\}$.
- **d)** Montrer que u vérifie (P2)

4) On considère dans cette question un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer que u vérifie (P2).
Indication : on pourra considérer un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$ *dans* E.

5) On considère dans cette question un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. On rappelle que $n = \dim(E)$.

- **a)** Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \operatorname{Ker}\left(u^{n-1}\right)$. Montrer que $\left(x_0, \ldots, u^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ est une base de E.
- **b)** Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \left(x_0, \ldots, u^{n-1}\left(x_0\right)\right)$.

  On suppose pour la suite que n est pair, et l'on écrit $n = 2m$.
- **c)** Écrire la matrice de u dans la base :

$$\mathcal{B}' = \Big(x_0, u^2\left(x_0\right), \ldots, u^{2m-2}\left(x_0\right), u\left(x_0\right), u^3\left(x_0\right), \ldots, u^{2m-1}\left(x_0\right)\Big)$$

- **d)** En déduire que u vérifie (P2).

6) Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 4$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, où $3 \leqslant p \leqslant n-1$. On considère un supplémentaire G_{p-1} de $\operatorname{Ker}\left(u^{p-1}\right)$ dans E :

$$\operatorname{Ker}\left(u^{p-1}\right) \oplus G_{p-1} = E$$

- **a)** Montrer que $u\left(G_{p-1}\right)$ est un sous espace vectoriel de $\operatorname{Ker}\left(u^{p-1}\right)$ qui vérifie

$$u\left(G_{p-1}\right) \cap \operatorname{Ker}\left(u^{p-2}\right) = \{0_E\}$$

- **b)** Justifier l'existence d'un sous-espace G_{p-2} de E vérifiant les deux conditions suivantes :

$$u\left(G_{p-1}\right) \subset G_{p-2}, \quad \operatorname{Ker}\left(u^{p-1}\right) = \operatorname{Ker}\left(u^{p-2}\right) \oplus G_{p-2}$$

  En itérant ce procédé, on construit ainsi et on admet l'existence de sous-espaces $G_1, \ldots G_{p-1}$ vérifiant, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$,

$$\operatorname{Ker}\left(u^{k+1}\right) = \operatorname{Ker}\left(u^k\right) \oplus G_k$$

  et, pour tout k tel que $2 \leqslant k \leqslant p-1$,

$$u\left(G_k\right) \subset G_{k-1}$$

- **c)** Montrer que u vérifie (P2).

— **FIN** —