DS n°9 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom :		Note :	

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Matrice et algèbre linéaire

On considère l'application linéaire $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ 3y - 2z \\ -x + 3y + z \end{pmatrix} \end{array} \right.$. On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}_1$ la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathscr{B}_2$ la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. On note $P_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{C}}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ dans $\mathscr{C}$ et $P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}_1}$ la matrice de passage de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}_1$. Alors :

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) =$ $\boxed{}$ (1)

$P_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{C}} =$ $\boxed{}$ (2)

$P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}_1} =$ $\boxed{}$ (3)

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) =$ $\boxed{}$ (4)

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{P}$ le plan $x + 2y + 3z = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite $\left\{ \begin{array}{l} x = 3z \\ y = 2z \end{array} \right.$. Soit p la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) =$ $\boxed{}$ (5)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par $f : M \mapsto AM + MA$.

Déterminer en fonction de A : $\operatorname{tr}(f) =$ $\boxed{}$ (6)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & m & 1 \\ m+1 & 1 & 2m \\ m+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\operatorname{rg}(M) = 2 \Leftrightarrow m \in$ $\boxed{}$ (7)

Soit l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1)$ de $\mathbb{R}_4[X]$. On note M la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$.

$M =$ $\boxed{}$ (8) $M^n =$ $\boxed{}$ où $n \in \mathbb{Z}$ (9)

Probabilité

Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que m divise n. On souhaite dépister une population de n personnes, grâce à un contrôle sanguin, pour connaître les personnes atteintes d'un virus. On sait que le virus affecte des personnes avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Pour effectuer ce dépistage, on forme des groupes de m personnes. Dans chaque, groupe, on mélange les échantillons des m personnes en un unique échantillon, dans lequel on teste la présence du virus. Si le test révèle la présence du virus dans cet échantillon, on teste toutes les personnes du groupe séparément. On note X le nombre de groupes infectés par le virus et Y le nombre total de tests effectués.

Déterminer la loi de X. $\boxed{}$ (10)

$\mathbb{E}(Y) =$ $\boxed{}$ (11) $\mathrm{V}(Y) =$ $\boxed{}$ (12)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant la même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $S = \max(X, Y)$.

Loi du couple (S, X) : $\boxed{}$ (13)

Loi de S : $\boxed{}$ (14) $\mathbb{E}(S) =$ $\boxed{}$ (15)

Soit $n \geqslant 2, X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, L la matrice ligne dont les coefficients sont les X_j et $M = L^{\mathrm{T}} L$. Notons a la probabilité que M soit la matrice d'une projection.

Loi de $\operatorname{rg}(M)$: $\boxed{}$ Loi de $\operatorname{tr}(M)$: $\boxed{}$ (16)

$a =$ $\boxed{}$ (17)

— FIN —