Devoir surveillé n° 8
Version 2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Étude d'un endomorphisme.

On note $E = \mathscr{C}^0(]-1,+\infty[)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $I =]-1,+\infty[$. Étant donné un élément f de E, on désigne par $T(f)$ l'application de I vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I,\ T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Partie 1 — Quelques exemples.

1) On définit l'application $\begin{array}{rccl} f_1 : & I & \to & \mathbb{R}. \\ & t & \mapsto & \dfrac{t}{(t+2)^2} \end{array}$

a) Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$T(f_1)(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) - \frac{2}{x+2} - \ln 2 + 1.$$

b) Donner un développement asymptotique à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ de $T(f_1)(x)$ au voisinage de $+\infty$.

2) On définit l'application $\begin{array}{rccl} f_2 : & I & \to & \mathbb{R}. \\ & t & \mapsto & \dfrac{t^2}{(t^2+1)^2} \end{array}$.

a) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2}{(X+1)(X^2+1)^2}$.

b) Pour tout $x > -1$, établir une relation entre

$$J_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \text{ et } J_2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

c) En déduire $T(f_2)$.

3) Pour tout entier n non nul, on définit $g_n : t \mapsto t^n$. On a bien $g_n \in E$. Soit $x \in I$.

a) Déterminer une relation entre $T(g_{n+1})(x)$ et $T(g_n)(x)$.

b) En déduire l'expression de $T(g_n)(x)$ à l'aide d'une somme (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Partie 2 — Propriétés algébriques élémentaires de T.

On rappelle que l'on a défini T comme une application $T : E \to \mathbb{R}^I$.

4) **a)** Vérifier que T définit un endormorphisme de E.

b) Soit $f \in E$. Démontrer que $T(f)$ est dérivable (on donnera $T(f)'$) et calculer $T(f)(0)$.

c) Déterminer le noyau de T. Que peut-on en déduire ?

d) Déterminer l'image de T. Que peut-on en déduire ?

Partie 3 — Comportement à l'infini.

On considère un élément $f \in E$ et on suppose que f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $t \to +\infty$. Nous allons étudier le comportement de la fonction $T(f)$ en $+\infty$.

5) On suppose dans cette question que $\ell = 0$.

a) Montrer que la fonction f est bornée sur l'intervalle $J = [0, +\infty[$.

On notera dans cette question :

$$M = \sup_{t \in [0,+\infty[} |f(t)|$$

b) Pour $x \geqslant 1$, on pose

$$\alpha(x) = \sup \{|f(t)| \ , \ \ln(x) \leqslant t \leqslant x\} .$$

Montrer que $\alpha(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$:

$$|T(f)(x)| \leqslant M \int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln(x)}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$

d) En déduire que $T(f)(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(\ln x)$

6) On suppose dans cette question que $\ell \in \mathbb{R}^*$.
Trouver un équivalent simple de $T(f)(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

7) On suppose dans cette question que $\ell = +\infty$.
Montrer que $T(f)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

8) On considère dans cette question l'élément $f \ : \ t \mapsto \mathrm{e}^t$ et donc, pour tout $x \in I$:

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{t+1} \,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale. On note, pour $n \geqslant 2$:

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^n} \,\mathrm{d}t.$$

a) En écrivant pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 0$ que

$$F_n(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^n} \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^n} \,\mathrm{d}t,$$

montrer que :

$$F_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^{n-2}}\right)$$

b) En intégrant $F_n(x)$ par parties, montrer que $F_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^{n-1}}\right)$.

c) Trouver trois constantes a, b, c réelles telles qu'au voisinage de $+\infty$:

$$T(f)(x) \underset{x \to +\infty}{=} a\frac{\mathrm{e}^x}{x} + b\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} + c\frac{\mathrm{e}^x}{x^3} + o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\right).$$

II. Pseudo-inverse d'un endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E .
On dit que f est *pseudo-inversible* quand il existe g dans $\mathscr{L}(E)$ tel que les trois relations suivantes sont vérifiées

$$\text{(i) } f\circ g\circ f=f \qquad \text{(ii) } g\circ f\circ g=g \qquad \text{(iii) } f\circ g=g\circ f.$$

Dans ce cas, l'endomorphisme g de E est appelé un *pseudo-inverse* de f .

1) **a)** Soit$f$ un endomorphisme de E pseudo-inversible, de pseudo-inverses g et g' . Montrer que $f\circ g'=g\circ f$.

b) En déduire $g'=g$, et donc l'unicité du pseudo-inverse d'un endomorphisme pseudo-inversible de E .

2) Montrer que tout automorphisme f de E est pseudo-inversible et préciser son pseudo-inverse.

3) Si f est un endomorphisme pseudo-inversible de E, de pseudo-inverse g, prouver que pour tout réel non nul a, les endomorphismes g et af sont pseudo-inversibles, et préciser leurs pseudo-inverses.

4) Soit f un endomorphisme pseudo-inversible de E, de pseudo-inverse g.
Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, f^k est pseudo-inversible, et donner son pseudo inverse.

5) Soit f un endomorphisme pseudo-inversible de E, de pseudo-inverse g.
Montrer que $E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$.

6) Soit f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

a) Pour x fixé dans E, prouver l'existence et l'unicité d'un vecteur y de $\operatorname{Im}(f)$, que l'on notera $g(x)$, tel que $(f(y)-x)\in\operatorname{Ker}(f)$.

b) Montrer que l'application g qui à tout x de E associe le vecteur $g(x)$ défini ci-dessus est un endomorphisme de E.

c) Montrer que f est pseudo-inversible de pseudo-inverse l'endomorphisme g défini à la question **6)b)**.

7) Quels sont les endomorphismes de E pseudo-inversibles ?

— FIN —