Devoir surveillé n° 8
Version 1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Espaces vectoriels supplémentaires.

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_p$ des réels appartenant à $[0,1]$, deux à deux distincts. On pose enfin $F = \{\, f \in E \mid \forall k \in [\![1,p]\!] \quad f(a_k) = 0 \,\}$.

1) Donner un exemple d'une fonction non nulle appartenant à F (*indication* : on pourra chercher une fonction polynomiale).

2) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

3) Montrer que l'application $\psi : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}^p \\ f & \mapsto & (f(a_1), \dots, f(a_p)) \end{array}$ est linéaire.

4) Déterminer $\mathrm{Ker}(\psi)$.

5) On définit p fonctions $g_1, \dots, g_p$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \quad \forall x \in [0,1] \quad g_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{x - a_j}{a_k - a_j}$$

a) Calculer $g_k(a_i)$ pour tout k et tout i dans $[\![1,p]\!]$.

b) On pose $G = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_p)$. Déterminer la dimension de G.

c) Soit $f \in E$. On pose $\widetilde{f} = f - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} f(a_k) g_k$. Calculer $\widetilde{f}(a_i)$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

d) Démontrer que $E = F \oplus G$.

II. Étude d'une fonction.

Partie I.

Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}$. Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Nous noterons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?

2) Qu'en déduisez-vous au sujet de $\mathscr{C}_f$?

3) Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions « est équivalent à », « est négligeable devant » et « est dominé par ».

$f(t)$ ·························· e^t lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t)$ ·························· $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\dfrac{\mathrm{e}^{\,t}}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$

Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre réponse.

4) Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

5) Soit $t \in \mathbb{R}$, expliciter $f'(t)$.

6) Dressez le tableau des variations de f.

7) Soit $t \in \mathbb{R}$, expliciter $f''(t)$.

8) Montrer que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α. Vous ne chercherez pas à calculer α.

9) Prouver l'encadrement $-\dfrac{1}{5} < \alpha < 0$.

10) Expliciter le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Que pouvez-vous en déduire concernant $\mathscr{C}_f$?

11) Tracez la courbe représentative de f. Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

Partie II.

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathscr{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)\mathrm{e}^{\,t}}{(1+t^2)^{n+1}}.}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

12) Il est clair que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$;

Vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n.

13) Fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathscr{A}(n)$ acquise. Etablissez l'assertion $\mathscr{A}(n+1)$;

Vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n.

Il résulte donc des questions **12)** et **13)** que l'assertion $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

15) Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n.

16) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de $c_n = P_n(i)$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie III.

Notons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi F est la primitive de f qui s'annule en 0.

17) Quel est le sens de variation de F ?

18) Montrer que $F(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.

19) Prouver l'encadrement $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$.

20) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de F, au point d'abscisse 0.

21) Expliciter le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$J(x) = \int_1^x \frac{t\mathrm{e}^{\,t}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t, \quad K(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t^3}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t^4}\,\mathrm{d}t.$$

22) Prouver l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x.

23) Pour $x \geqslant 1$, placer les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.

24) Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrer que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

25) En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$, montrer que $L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

26) En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

27) Exploiter les résultats des questions **17)**, **19)**, **20)** et **26)** pour donner l'allure de la courbe représentative de F.

— **FIN** —