DS n°8 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : | | Note : | |

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Analyse asymptotique

Soit $f : x \mapsto (x^2+x+1)\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. À la précision $\dfrac{1}{x^2}$ en $-\infty$:

$f(x) \underset{x\to-\infty}{=}$ ☐ (1)

$\mathscr{C}_f$ possède une asymptote Δ au voisinage de $-\infty$, d'équation : $y =$ ☐ (2)

et, au voisinage de $-\infty$, $\mathscr{C}_f$ se situe ☐ de Δ. (3)

Déterminer les DL suivants ($\mathrm{DL}_n(a)$ pour à l'ordre n et au voisinage du point a.)

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{1+2x} \underset{x\to 0}{=}$ ☐ (4)

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $\mathrm{e}^{x}\sqrt[3]{1+x} \underset{x\to 0}{=}$ ☐ (5)

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{1+\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=}$ ☐ (6)

$\mathrm{DL}_4(0)$ de $(1+\sin(x))^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=}$ ☐ (7)

Soit $h : x \mapsto \ln(1+x^3)\cos(x)\left(\mathrm{e}^{\sin^2 x}-1\right)$. Alors : $h^{(7)}(0) =$ ☐ (8)

Intégration

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sin(t)(1+3\cos t)}$ sur $]0,\pi/2]$ est :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)(1+3\cos t)} = \square \quad . \qquad (9)$$

Indiquer la limite des suites de termes généraux suivants.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \tag{10}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \tag{11}$$

On considère la fonction $\psi : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{t}{\sqrt{1+e^t}}\,\mathrm{d}t$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = \boxed{} \tag{12}$$

Dénombrement

Dans une urne, on dispose n boules blanches (numérotées de 1 à n) et n boules noires (numérotées aussi de 1 à n). Combien y a-t-il de possibilités de les tirer toutes (sans remise), sans que deux boules de même couleur ne se succèdent ?

$$\boxed{} \tag{13}$$

On dispose de 18 jetons : 4 rouges numérotés de 1 à 4, 6 blancs numérotés de 1 à 6 et 8 verts numérotés de 1 à 8.
On tire successivement et sans remise trois jetons. Combien y a-t-il de tirages :

tricolores : $\boxed{}$ (14) sans jeton vert : $\boxed{}$ (15)

unicolores : $\boxed{}$ (16) qui terminent par un 5 : $\boxed{}$ (17)

qui contiennent exactement un 5 et au moins un jeton vert : $\boxed{}$ (18)

Algèbre linéaire

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & + & 3y & + & z \\ -x & + & y & + & z \\ 2x & + & 4y & + & z \end{pmatrix}$.

Donner une base de chacun des sev de $\mathbb{R}^3$ suivants.

Ker(φ) : $\boxed{}$ (19) Im(φ) : $\boxed{}$ (20)

— **FIN** —